TD méthode de Horner et factorisations : corrigé de la section 4

Valentin Melot (suppléance de Valery Vialet) — Lycée N.-D. de la Providence

24 janvier 2021

4 Existence et unicité de la division euclidienne

Pour rappel, on cherche à démontrer le théorème suivant. Les questions du sujet de TD sont rappelées en gras.

> **Théorème 2 (division euclidienne polynômes à coefficients complexes)** *Soit f et g deux fonctions polynomiales, avec $g \neq 0$. Il existe un unique couple de fonctions polynomiales (q, r) telles que :*
>
> *(i)* $f = qg + r$ *;*
>
> *(ii)* $\deg r < \deg g$.

1. Pour cette question seulement, on admet le théorème 2. Démontrer le théorème 1.

Supposons que le théorème 2 soit vrai.

Soit f un polynôme et z_0 un complexe quelconque. Posons $h : z \mapsto z - z_0$. g est non-nul et de degré 1. D'après le théorème 2, il existe donc des polynômes q et r tels que $f = hq + r$, avec $\deg r < \deg g = 1$.

Donc r est de degré au plus 0, c'est-à-dire que c'est un polynôme constant (de degré 0 s'il est non-nul, de degré $-\infty$ s'il est nul). On peut donc écrire que $r : z \mapsto w \in \mathbf{C}$.

On a donc bien : pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = h(z)q(z) + r(z) = (z - z_0)q(z) + z_0$. On obtient bien le théorème 1 en posant $g := q$.

On souhaite tout d'abord démontrer l'unicité. Supposons donc que $f = gq + r = gq' + r'$, avec r et r' de degré inférieur à $n - 1$ (où n est le degré de g).

2. Donner une majoration de $\deg(r - r')$.

Puisque r et r' sont de degré au plus $n - 1$, leur différence est également de degré au plus $n - 1$.

3. On suppose par l'absurde que $q \neq q'$. Exprimer $r - r'$ en fonction de g, q et q', et en déduire une condition sur $\deg(r - r')$. Conclure.

Puisque $gq + r = gq' + r'$, on a $gq - gq' = r' - r$, soit $g(q - q') = r' - r$.

Par hypothèse, $q - q'$ est non nul, et a donc un degré $d \in \mathbf{N}$. En ce cas, le degré de $g(q - q')$ est égal à $d + \deg g$, et est donc supérieur à n. Or, $g(q - q') = r' - r$, qui d'après la question précédente a un degré au plus $n - 1$.

On en déduit que l'hypothèse est fausse, c'est-à-dire que $q = q'$.

Il suit que $r' - r = g(q - q') = g \times 0 = 0$, d'où $r' = r$.

On a démontré que si $f = gq+ = gq' + r'$ avec r et r' de degré inférieur à $n - 1$, alors $q' = q$ et $r' = r$. Autrement dit, le couple (q, r), s'il existe, est unique.

On désire maintenant démontrer l'existence de q et r vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour procéder ainsi, on <u>fixe</u> la fonction polynômiale g, et on appelle m son degré. Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle $\mathscr{H}_n$ l'hypothèse suivante :

$\mathscr{H}_n$: **pour toute fonction polynômiale f de degré au plus n, il existe q et r (dépendant de f) tels que $f = gq+r$ et $\deg r < m$.**

4. Démontrer $\mathscr{H}_{m-1}$.

Soit f une fonction polynômiale de degré $k \leqslant m - 1$. Alors $\deg f < \deg g$, et :

$$f = 0 \times g + f.$$

Donc $\mathscr{H}_{m-1}$ est vraie, avec $q = 0$ et $r = f$.

On suppose, pour un certain $n \in \mathbf{N}$, que $\mathscr{H}_n$ est vraie.

5. Soit f de degré $n + 1$. Identifier un nombre complexe w et un entier k tel que le polynôme $h : z \longmapsto f(z) - wz^k g(z)$ ait un degré au plus n.

Puisque f est de degré $n + 1$, on peut écrire :

$$f : z \longmapsto az^{n+1} + \tilde{f}(z)$$

avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $\tilde{f}$ de degré au plus n.

De plus, g est de degré m, donc on peut écrire :

$$g : z \longmapsto bz^m + \tilde{g}(z)$$

avec $b \in \mathbf{C}^*$ et $\tilde{g}$ de degré au plus $m - 1$.

On a alors pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$f(z) - wz^k g(z) = \left(az^{n+1} - bwz^k z^m\right) + \left(\tilde{f}(z) - wz^k \tilde{g}(z)\right).$$

On cherche w et k tels que la première parenthèse s'annule. Pour cela, il faut et il suffit que $k + m = n + 1$, c'est-à-dire $k = n + 1 - m$, et que $a = bw$, c'est-à-dire $w = \frac{a}{b}$.

En ce cas, on a bien $\deg\left(wz^k\tilde{g}\right) = k + \deg \tilde{g} \leqslant n + 1 - m + m - 1 = n$.

Donc $z \longmapsto f(z) - wz^k g(z)$ est un polynôme de degré au plus n.

6. En déduire que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

Soit f un quelconque polynôme de degré au plus $n + 1$.

Si f est de degré au plus n, alors il existe q et r avec $\deg r < m$ d'après $\mathscr{H}_n$.

Sinon, f est de degré $n + 1$ exactement. Soient w et k donnés par la question précédente et soit $h : z \longmapsto f(z) - wz^k g(z)$. h est de degré au plus n. On applique donc l'hypothèse $\mathscr{H}_n$ à h : il existe $\tilde{q}$ et $\tilde{r}$ tels que $h = g\tilde{q} + \tilde{r}$ avec $\deg \tilde{r} < n$.

Or, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = h(z) + wz^k g(z)$. On en déduit donc que :

$$f(z) = g(z)\tilde{q}(z) + \tilde{r}(z) + wz^k g(z) = g(z)\left(\tilde{q}(z) + wz^k\right) + \tilde{r}.$$

On a donc $f = gq + r$ avec $r = \tilde{r}$, $q : z \longmapsto \tilde{q}(z) + wz^k$. De plus, $\deg r = \deg \tilde{r} < m$.

Ceci étant vrai pour tout f, $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

7. Conclure.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{H}_n$ est vraie. Donc quel que soit f, il existe des polynômes q et r tels que $f = gq + r$ avec $\deg r < m$.

Ceci étant vrai quel que soit g, on a démontré le théorème 2.