Travail dirigé : factorisation de polynômes, algorithme de Horner

Valentin Melot (suppléance de Valery Vialet) — Lycée N.-D. de la Providence

20 janvier 2021

1 Une équation polynomiale simple

1. On considère dans un premier temps la fonction polynomiale $f_3 : z \longmapsto z^3 - 1$. Identifier une racine évidente de f. En déduire une factorisation de f, puis trouver toutes ses racines.

2. Montrer qu'il existe un nombre complexe j, de partie imaginaire strictement positive, tel que les racines de f sont j, j^2 et j^3.

3. Que peut-on dire de j^2 et $\bar{j}$?

4. Que peut-on dire des points d'affixe respectifs j, j^2 et j^3 ?

2 Pratique de la factorisation

Trouver des racines évidentes, puis factoriser les fonctions polynomiales suivantes dans $\mathbf{C}$:

1. $f_4 : z \longmapsto z^4 - 1$.

2. $f_6 : z \longmapsto z^6 - 1$.

3. $f_{12} : z \longmapsto z^{12} - 1$. *(à faire à la maison)*

3 Algorithme de Horner

Dans cette section uniquement, on admet le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit f une fonction polynomiale définie dans $\mathbf{C}$, et $z_0 \in \mathbf{C}$. Il existe une unique fonction polynomiale g et un unique complexe w tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = (z - z_0)g(z) + w$.*

On considère des fonctions polynomiales f et g et des nombres complexes z_0 et w comme dans l'énoncé du théorème précédent.

1. Exprimer w en fonction de f et de z_0. Que peut-on dire dans le cas où z_0 est une racine de f ?

2. Soit n le degré de f. Soit z un complexe quelconque. Combien de multiplications faut-il faire pour calculer, à la main, la valeur de $f(z)$?

3. Quel est le degré du polynôme g ?

On appelle $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et $d_0, \ldots, d_{n-1}$ les coefficients des polynômes f et g, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \ ; \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k z^k.$$

4. Calculer d_{n-1} en fonction de c_n et z_0.

5. Développer le produit $(z - z_0)g(z)$. En déduire, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, une expression de c_k en fonction de d_k et $d_k - 1$. *On pourra réaliser un changement de variable $k' = k+1$ dans l'une des sommes. On admettra que deux fonctions polynomiales complexes sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux deux à deux.*

6. Déduire de la question précédente une expression de d_k en fonction des c_i et de d_{k+1} lorsque $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

7. Calculer enfin w en fonction de c_0 et d_0.

Les questions 4, 6 et 7 nous permettent de calculer g et w dans le théorème 1 par une série de transformations affines. On présente souvent l'application de cet algorithme dans un tableau comme celui qui suit :

Coefs. de f	c_n	c_{n-1}	$\ldots$	c_1	c_0
Coefs. de g	$d_{n-1} = c_n$	$d_{n-2} = z_0 d_{n-1} + c_{n-1}$	$\ldots$	$d_0 = z_0 d_1 + c_1$	$w = z_0 d_0 + c_0$

où les cases de la deuxième ligne sont remplies en cascade, de la gauche vers la droite. L'algorithme précédent s'appelle *algorithme de Horner* ou *méthode de Ruffini*.

8. Appliquer la méthode précédente au polynôme $f : z \longmapsto 4z^3 - 7z^2 + 3z - 5$ pour $z_0 = 2$.

9. Retrouver ainsi plus rapidement les résultats de la deuxième partie.

10. Avec cette méthode, en combien de multiplications peut-on calculer la valeur de $f(z_0)$?

4 Existence et unicité de la division euclidienne

On souhaite maintenant démontrer et généraliser le théorème 1 précédemment énoncé. Nous allons chercher à montrer le résultat suivant :

Théorème 2 (division euclidienne polynômes à coefficients complexes) *Soit f et g deux fonctions polynomiales, avec $g \neq 0$. Il existe un unique couple de fonctions polynomiales (q, r) telles que :*

(i) $f = qg + r$;

(ii) $\deg r < \deg g$.

q et r sont respectivement appelées le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de f par g.

1. Pour cette question seulement, on admet le théorème 2. Démontrer le théorème 1.

On souhaite tout d'abord démontrer l'unicité. Supposons donc que $f = gq + r = gq' + r'$, avec r et r' de degré inférieur à $n - 1$ (où n est le degré de g).

2. Donner une majoration de $\deg(r - r')$.

3. On suppose par l'absurde que $q \neq q'$. Exprimer $r - r'$ en fonction de g, q et q', et en déduire une condition sur $\deg(r - r')$. Conclure.

On désire maintenant démontrer l'existence de q et r vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour procéder ainsi, on fixe la fonction polynômiale g, et on appelle m son degré. Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle $\mathscr{H}_n$ l'hypothèse suivante :

$\mathscr{H}_n$: pour toute fonction polynômiale f de degré au plus n, il existe q et r (dépendant de f) tels que $f = gq + r$ et $\deg r < m$.

4. Démontrer $\mathscr{H}_{m-1}$.

On suppose, pour un certain $n \in \mathbf{N}$, que $\mathscr{H}_n$ est vraie.

5. Soit f de degré $n + 1$. Identifier un nombre complexe w et un entier k tel que le polynôme $h : z \longmapsto f(z) - wz^k g(z)$ ait un degré au plus n.

6. En déduire que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

7. Conclure.