Feuille d'exercices : limites de fonctions

Valentin Melot – Lycée N. D. de la Providence

16 janvier 2021

Calculer, en justifiant soigneusement, les limites suivantes. On indiquera les transformations effectuées, ainsi que les limites de référence et les théorèmes utilisés.

On commence tout doucement :

$$A = \lim_{x\to-\infty} 2x^4 + 2x^2 + 3 \qquad B = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} + \frac{e^x}{x} + x^{17} - 2$$

$$C = \lim_{x\to-\infty} xe^x \qquad D = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Quelques factorisations en l'infini pour se mettre en jambe :

$$E = \lim_{x\to+\infty} 13x^3 - 7x^2 + 7x - 11 \qquad F = \lim_{x\to-\infty} 14e^{-x} + 8x^9 - 7x^3$$

$$G = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+17}{x-11} \qquad H = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7x-5}{11x+2}$$

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{11x} - 7xe^{3x} + 14x - 7 + e^{-2x}}{7x^{32}e^{10x} - 5x^4 + 1} \qquad J = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x + x^4}{x^2e^x + x^2}$$

D'autres factorisations :

$$K = \lim_{x\to-7} \frac{x^2+14x+49}{x+7} \qquad L = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\sqrt[3]{x}e^{7x} + \sqrt{x}e^x + \sqrt{x} - x^8 + e^x}{\sqrt[3]{x} + x - e^{4x}}$$

$$M = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2 + x^3 + x^17}{x^2 - x^4 - x^15} \qquad N = \lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$$

$$O = \lim_{x\to1} \frac{x^3+9x^2-17x+7}{x-1} \qquad P = \lim_{x\to-2} \frac{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}{x^2+4x+4}$$

Divers :

$$Q = \lim_{x\to+\infty} 1,001\cdot e^x + e^x \sin x \qquad R = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(e^x\right)$$

$$S = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)} \qquad T = \lim_{x\to 0} x\cos x$$

$$U = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \qquad V = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}}$$

$$W = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$$

Difficile :

$$X = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \qquad Y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}}$$

Très difficile :

$$Z = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}}.$$

Deux pistes de réflexion qui peuvent permettre d'aboutir :

— En essayant de factoriser, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$: $a^3 - b^3$ par $a - b$;

— Ou en s'appuyant sur le programme de mathématiques expertes : introduire un nombre $j \in \mathbf{C}$, différent de 1, tel que $j^3 = 1$, puis chercher à adapter la méthode de la multiplication par le conjugué qui fonctionnait pour les racines carrées.