Problème : les sommes de Riemann

Valentin Melot — Terminale spé maths A

À faire pour le 10 mai 2021

On considère un repère orthonormé du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $p_n : x \longmapsto x^n$. On pose par ailleurs $g : x \longmapsto e^x$ et $h : x \longmapsto xe^x$. On définit $\mathscr{C}_{p_n}$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ leur courbe représentative respective.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la quantité $\pi_n(x)$ comme étant l'aire de la surface délimitée par :

— Au-dessus, la courbe $\mathscr{C}_{p_n}$;

— Au-dessous, l'axe des abscisses ;

— À gauche, l'axe des ordonnées ;

— À droite, la droite verticale d'abscisse x.

Par exemple, $\pi_0(1)$ est l'aire du carré dont les sommets ont pour coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. $\pi_2(2)$ est l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(2, 2)$.

On définit de façon similaire les aires $\gamma(x)$ (pour la surface délimitée par $\mathscr{C}_g$) et $\eta(x)$ (pour la surface délimitée par $\mathscr{C}_h$).

1. Dans des repères orthonormés différents, représenter graphiquement les courbes $\mathscr{C}_{p_2}$ et $\mathscr{C}_g$. Hachurer les surfaces d'aires $\pi_2(3)$ et $\gamma(2)$.

2. Par des arguments géométriques, calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, les aires $\pi_0(x)$ et $\pi_1(x)$.

3. On cherche désormais à calculer $\pi_2(1)$. Pour cela, on réalise la construction suivante :

— Pour un $n > 2$ fixé, on construit k rectangles de largeur $\frac{1}{n}$. Le k-ième rectangle a pour base les points de coordonnées $\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)$ et $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$. La hauteur de chaque rectangle est fixée telle que le coin supérieur *gauche* du rectangle appartienne à $\mathscr{C}_{p_2}$. La réunion de ces n rectangles forme une surface appelé $\mathscr{S}_n^-(1)$.

— On construit de même une surface $\mathscr{S}_n^+(1)$ en reprenant la méthode précédente, mais c'est cette fois-ci le coin supérieur *droit* de chaque rectangle qui appartient à $\mathscr{C}_{p_2}$.

La figure 1 représente la construction pour $n = 5$.

a) Dans la construction de $\mathscr{S}_n^+(1)$, donner l'aire du k-ième rectangle. En déduire que l'aire de $\mathscr{S}_n^+(1)$, notée $R_n^+(1)$, est égale à :

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

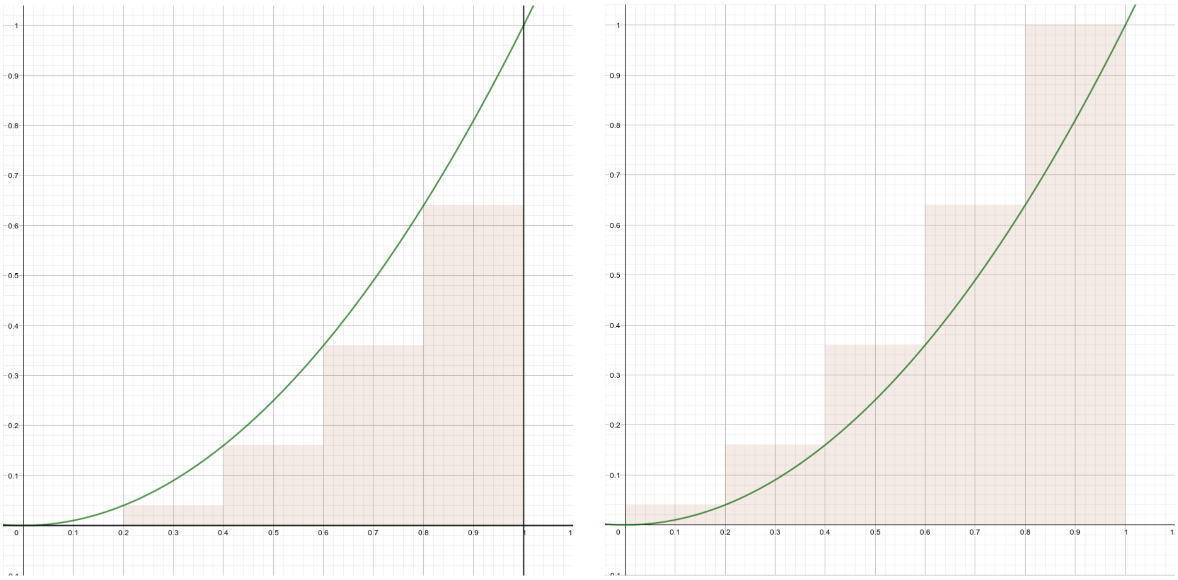

FIGURE 1 – Tracés de $\mathscr{S}_5^-(1)$ (en marron, à gauche) et $\mathscr{S}_5^+(1)$ (en marron, à droite) pour $n = 5$. Sur les deux graphiques, la courbe verte est $\mathscr{C}_{p_2}$.

b) Calculer de même $R_n^-(1)$, l'aire de $\mathscr{S}_n^-(1)$.

c) Justifier sommairement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n^-(1) \leqslant \pi_2(1) \leqslant R_n^+(1)$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

e) En déduire que les suites $(R_n^+(1))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(R_n^-(1))_{n\in\mathbf{N}}$ convergent, puis donner la valeur de $\pi_2(1)$.

4. On souhaite adapter le raisonnement précédent pour calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la valeur de $\pi_2(x)$. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n^+(x) = \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$ et calculer $R_n^-(x)$. En déduire de même la valeur de $\pi_2(x)$.

5. Ajuster le raisonnement précédent pour calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, la valeur de $\pi_3(x)$. On pourra commencer par démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

6. On souhaite à nouveau adapter ce raisonnement pour calculer, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, la valeur de $\gamma(x)$.

a) Établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n^-(x) \leqslant \gamma(x) \leqslant R_n^+(x)$ avec

$$R_n^-(x) = \frac{x}{n}\frac{e^{\frac{n-1}{n}x} - 1}{e^{\frac{x}{n}} - 1} \ ; \quad R_n^+(x) = e^{\frac{x}{n}} R_n^-(x).$$

On pourra s'intéresser à la suite géométrique de raison $e^{x/n}$.

b) Calculer $\lim_{n\to\infty} e^{(n-1)x/n}$ et $\lim_{n\to\infty} e^{x/n}$.

c) Déterminer la valeur de $\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1}$. En déduire la $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}\frac{1}{e^{x/n}-1}$.

d) Conclure enfin quant à la valeur de $\gamma(x)$.

7. (difficile) On s'intéresse enfin à $\eta(x)$.

a) Vérifier que $R_n^-(x) \leqslant \eta(x) \leqslant R_n^+(x)$ avec :

$$R_n^+(x) = \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{kx}{n}} \ ; \quad R_n^-(x) = R_n^+(x) - \frac{x^2 e^x}{n}.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}$. On définit, sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, la fonction $a : y \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k y^{k-1}$. Vérifier que la fonction $A : y \longmapsto \sum_{k=0}^{n} y^k$ est une primitive de A sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. En dérivant A de deux façons différentes, montrer que pour tout $y \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k y^k = y\frac{n y^{n+1} - (n+1)y^n + 1}{(y-1)^2}.$$

c) Justifier en conséquence qu pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$R_n^+(x) = \frac{x^2}{n^2}\frac{e^{x/n}}{\left(e^{x/n} - 1\right)^2}\left[n e^x \left(e^{x/n} - 1\right) - e^x + 1\right]$$

d) En utilisant la question 6.c), démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2}\frac{1}{\left(e^{x/n} - 1\right)^2} = 1.$$

e) En reprenant la technique utilisée à la question 6.c), démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{x/n} - 1\right).$$

f) En déduire enfin la limite de $(R_n^+(x))_{n\in\mathbf{N}}$, puis la valeur de $\eta(x)$.

8. Que peut-on dire de π_0, π_1, π_2, π_3, γ et η par rapport à p_0, p_1, p_2, p_3, g et h respectivement ?