# Exercice : étude d'une suite récurrente d'ordre 1

Valentin Melot — Terminale spé maths A

4 avril 2021

**Problème ouvert (version non-guidée)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par récurrence en posant $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de la valeur de $u_0$. *On pourra s'intéresser aux suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.

**Exercice (version guidée)**

1. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $[0,1]$. Vérifier que $f$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, puis étudier ses variations et sa continuité.
2. Montrer que $f$ admet un unique point fixe, que l'on appelle $\alpha$, et justifier que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors sa limite est nécessairement égale à $\alpha$.

   On suppose jusqu'à nouvel ordre que $u_0 \in ]0,\alpha[$.
3. Justifier que $(u_n)_n \in \mathbf{N}$ n'est pas monotone.

   Soit $g = f \circ f$, définie sur $]0,1[$.
4. Étudier les variations et la continuité de $g$.
5. Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[0,1]$. On pourra commencer par déterminer trois valeurs de $x$ pour lesquelles cette quantité s'annule.
6. Soit $x \in [0,1]$. Justifier que si $x < \alpha$, alors $x < g(x) < \alpha < f(x)$, et que si $x > \alpha$, alors $f(x) < \alpha < g(x) < x$.

   On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$.
8. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent toutes deux vers $\alpha$.
9. *(Difficile)* En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\alpha$.
10. Conclure quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de la valeur de $u_0 \in [0,1]$.

## Question 1

Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 1-x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1$ (car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante). Donc $\boxed{f \text{ prend bien ses valeurs dans } [0,1],}$ ce qui assure que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

La fonction $x \longmapsto 1-x$ est affine donc continue sur $[0,1]$, et prend sur cet intervalle ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$. La fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$. Par composition, $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,1].}$

Enfin, pour tous $x, y \in [0,1]$ tels que $x < y$, $1-y < 1-x$ donc $\sqrt{1-y} < \sqrt{1-x}$ (la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante), soit $f(y) < f(x)$. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$

## Question 2

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} x = f(x) &\iff x = \sqrt{1-x} \\ &\iff x^2 = 1-x && \text{car } x \geqslant 0 \\ &\iff x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ce dernier trinôme a pour discriminant $\Delta = 5$, et donc pour racines $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$. Puisque $5 > 1$, $\alpha > 0$. Donc finalement,

$$x = f(x) \iff x = \alpha$$

donc $\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ est l'unique point fixe de } f.}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge également vers $\ell$, c'est-à-dire que $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell$. Or, $f$ est continue en $\ell$, donc $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$, et donc $\ell = \alpha$.

$\boxed{\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge, alors sa limite est } \alpha.}$

## Question 3

Par hypothèse, $u_0 < \alpha$. Or, $f$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $f(u_0) > f(\alpha)$, c'est-à-dire que $u_1 > \alpha$. De même, $f(u_1) < f(\alpha)$, soit $u_2 < \alpha$. On a donc :

- $u_0 < \alpha < u_1$,
- $u_2 < \alpha < u_1$,

et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ n'est pas monotone.}}$

*Remarque : l'on sait pas, à ce stade, si $u_0$ est plus petit que $u_2$ ou non.*

## Question 4

$f$ est continue sur $[0,1]$. Par composition, $f \circ f$ est continue également sur $[0,1]$, c'est-à-dire que $\boxed{g \text{ est continue sur } [0,1].}$

Soient $x, y \in [0,1]$ avec $x < y$. Par stricte décroissance de $f$, $f(x) > f(y)$, puis $f(f(x)) < f(f(y))$. Aussi, $g(x) < g(y)$. Donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0,1].}$

## Question 5

On remarque que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. En conséquence, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. En outre, on a montré que $f(\alpha) = \alpha$, donc $g(\alpha) = \alpha$. Aussi, $\boxed{g(x) - x \text{ s'annule en } 0,\ \alpha \text{ et } 1.}$

Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
g(x) - x \leqslant 0 &\iff g(x) \leqslant x \\
&\iff \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}} \leqslant x && \text{car } y \longmapsto y^2 \text{ est croissante sur } [0,1] \\
& && \text{et les deux membres sont positifs} \\
&\iff 1 - \sqrt{1 - x} \leqslant x^2 \\
&\iff 1 - x^2 \leqslant \sqrt{1 - x} \\
&\iff (1 - x^2)^2 \leqslant 1 - x && \text{car } y \longmapsto y^2 \text{ est croissante sur } [0,1] \\
& && \text{et les deux membres sont positifs} \\
&\iff 1 - 2x^2 + x^4 \leqslant 1 - x \\
g(x) - x \leqslant 0 &\iff x^4 - 2x^2 + x \leqslant 0.
\end{aligned}$$

On démontre de même que $g(x) - x = 0 \iff x^4 - 2x^2 + x = 0$ (car aucune division par $x$ n'a été faite).

Soit $P : x \longmapsto x^4 - 2x^2 + x$. Immédiatement, 0 et 1 sont des racines de $P$. On factorise donc $P$ par $(x - 1)$ et $x$. On trouve (par identification, ou bien en appliquant la méthode de Horner) que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$P(x) = x(x - 1)(x^2 + x - 1)$$

Et donc, en utilisant la factorisation de la question 2,

$$P(x) = x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta)$$

avec $\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$.

*Remarque : d'après ce qui précédait, puisque $g(\alpha) = \alpha$, il était immédiat que $P(\alpha) = \alpha$. On aurait donc pu factoriser également par $(x - \alpha)$, et trouver le dernier facteur de degré 1 par la méthode de Horner.*

On peut donc répondre en réalisant le tableau de signe ci-dessous :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $x - \alpha$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x - \beta$ | | $+$ | | $+$ | |
| $P(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g(x) - x$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |

Autrement dit,

$$\boxed{g(x) - x \text{ est positif pour } x \in ]0, \alpha[, \text{ négatif pour } x \in ]\alpha, 1[, \text{ et s'annule en } 0, \alpha \text{ et } 1.}$$

## Question 6

D'après ce qui précède, si $x < \alpha$, alors $g(x) - x > 0$, donc $g(x) > x$. En outre, $f$ étant strictement décroissante, d'après le raisonnement fait à la question 3, $f(x) > \alpha$ et $g(x) < \alpha$. On a donc bien :

$$\boxed{\text{Si } x < \alpha, \text{ alors } x < g(x) < \alpha < f(x).}$$

De même, si $x > \alpha$, alors $g(x) - x < 0$, donc $g(x) < x$. En outre, $f(x) < \alpha$, et $\alpha < g(x)$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } x > \alpha, \text{ alors } f(x) < \alpha < g(x) < x.}$$

## Question 7

On remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(u_{2n}) = g(v_n).$$

De même, $w_{n+1} = g(w_n)$.

Soit pour tout $f \in \mathbf{N}$, $\mathscr{H}_n \ : \ v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$.

— Initialisation : d'après la question 6, en prenant $x = u_0$, on a :

$$u_0 < g(u_0) < \alpha < f(u_0)$$

soit :

$$u_0 < u_2 < \alpha < u_1.$$

En outre, toujours d'après la question 6, en prenant $x = u_1 > \alpha$, on a :

$$f(u_1) < \alpha < g(u_1) < u_1$$

soit

$$u_2 < \alpha < u_3 < u_1.$$

On en déduit donc que :

$$u_0 < u_2 < \alpha < u_3 < u_1.$$

Et donc :

$$v_0 < v_1 < \alpha < w_1 < w_0.$$

Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

— Hérédité : supposons $\mathscr{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n.$$

Or, d'après la question 4, $g$ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Donc :

$$g(v_n) < g(v_{n+1}) < g(\alpha) < g(w_{n+1}) < g(w_n),$$

d'où

$$v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}.$$

Aussi $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion : par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Autrement dit, on a bien, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n.}$$

*Remarque : cela est suffisamment rare pour être signalé, mais ici, c'est l'initialisation et non pas l'hérédité qui est la plus difficile à démontrer. En effet, l'hérédité repose simplement sur la croissance de $g$, qui est un résultat facile à obtenir. L'initialisation, en revanche, suppose de démontrer que $u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1$, ce qui requiert de résoudre des inégalités impliquant deux racines carrées, et donc d'étudier le signe d'un polynôme de degré 4 comme nous l'avons fait à la question 5.*

*Remarque 2 : à noter que si $u_0$ avait été choisi supérieur à $\alpha$, alors l'initialisation aurait été fausse mais l'hérédité inchangée. On aurait montré par récurrence une inégalité dans laquelle les rôles de $v$ et $w$ sont inversés.*

## Question 8

D'après la question précédente, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite $\ell$. De même, $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite $\ell'$.

Ces suites vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$, et $g$ étant continue sur $[0, 1]$, leurs limites respectives sont toutes deux des points fixes de $g$, c'est-à-dire que $g(\ell) = \ell$ et $g(\ell') = \ell'$. Aussi, d'après la question 5, $\ell, \ell' \in \{0, \alpha, 1\}$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n < \alpha$. Donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \leqslant \alpha$. Donc $\ell \in \{0, \alpha\}$. Or, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante, donc par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n > v_0$. Par passage à la limite, $\ell \geqslant v_0 > 0$. Donc $\ell \neq 0$. Il suit que $\ell = \alpha$.

De même, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha < w_n < w_0$, donc par passage à la limite, $\alpha \leqslant \ell' \leqslant w_0$. Or, $f$ étant <u>strictement</u> décroissante, puisque $u_0 > 0$, $f(u_0) < f(0) = 1$, soit $w_0 < 1$. Donc $\ell' = \alpha$.

Aussi, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ convergent toutes deux vers } \alpha.}$

## Question 9

Nous allons démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\alpha$. Par définition de la limite d'une suite, cela revient à montrer que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a $\alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon$.

Fixons $\varepsilon > 0$.

On a montré que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeait vers $\alpha$. Cela signifie qu'il existe un $M_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant M_\varepsilon$, on a $\alpha - \varepsilon < v_n < \alpha + \varepsilon$.

De même, il existe un $L_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant L_\varepsilon$, on a : $\alpha - \varepsilon < w_n < \alpha + \varepsilon$.

On cherche une condition *suffisante* pour que $2n \geqslant M_\varepsilon$ et $2n + 1 \geqslant L_\varepsilon$. On pose pour cela $N_\varepsilon = \max(2M_\varepsilon, 2L_\varepsilon + 1)$. En ce cas, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$,

— Soit $n$ est pair, et s'écrit sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbf{N}$. On a alors $u_n = u_{2k} = v_k$. En ce cas, $2k \geqslant N_\varepsilon \geqslant 2M_\varepsilon$, soit $k \geqslant M_\varepsilon$. Aussi,

$$\alpha - \varepsilon < v_k < \alpha + \varepsilon,$$

soit

$$\alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon.$$

— Si au contraire $n$ est impair, alors $n$ s'écrit sous la forme $2k+1$ avec $k \in \mathbf{N}$. On a alors $u_n = w_k$. En ce cas, $2k+1 \geqslant N_\varepsilon \geqslant 2L_\varepsilon + 1$, soit $k \geqslant L_\varepsilon$. On a alors de même,

$$\alpha - \varepsilon < w_k < \alpha + \varepsilon,$$

soit

$$\alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon.$$

Dans tous les cas, dès lors que $n \geqslant N_\varepsilon$, on a bien $\alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon$.

Par définition de la limite, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

*Remarque : la manipulation des définitions formelles des limites « avec des $\varepsilon$ » ne figure pas dans les attendus du programme de terminale. Cette question doit donc être considérée comme hors-programme et ne pourrait pas être posée dans un examen de niveau terminale.*

## Question 10

On a montré dans les questions précédentes que si $u_0 \in ]0, \alpha[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeait vers $\alpha$. La quantité $u_n - \alpha$ prend alternativement un signe positif et un signe négatif.

Supposons maintenant que $u_0 = 0$. Alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$. Aussi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

De façon similaire, si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge.

Si désormais $u_0 = \alpha$, alors par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite $\alpha$.

Si enfin $u_0 \in ]\alpha, 1[$, alors par stricte décroissance de $f$, $u_1 \in ]0, \alpha[$. En posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u'_n = u_{n+1}$, on a $u'_0 \in ]0, \alpha[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u'_{n+1} = f(u'_n)$, donc d'après le cas traité précédemment, $(u'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente de limite $\alpha$. On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également convergente de limite $\alpha$.

En résumé : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \alpha \text{ si } 0 < u_0 < 1, \text{ et diverge pour } u_0 \in \{0,1\}.}$