Chapitre 9 : continuité

Valentin Melot — Terminale spé maths A

12 mars 2021

1 Définition et exemples

1.1 Définition

Définition 1 *Soient $x_0 \in \mathbf{R}$, et f une fonction définie en x_0. La fonction f est dite* continue en x_0 *si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.*

Remarque 2 Si cette limite existe, elle ne peut être égale qu'à $f(x_0)$.

Cela équivaut au fait que :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

sous réserve que les limites en x_0^+ et x_0^- existent.

Remarque 3 Cette condition équivaut à ce que l'on ait :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in \mathbf{R}, |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Une fonction continue est donc une fonction qui « ne sépare pas » les points.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est continue en 0.

Exercice 5 Démontrer que les fonctions affines sont continues en tout point de $\mathbf{R}$.

Remarque 6 La continuité en x_0 signifie que la fonction considérée ne fait pas de « saut » en x_0.

Définition 7 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite* continue sur I *si elle est continue en tout point de I.*

Contre-exemple 8
- La fonction *partie entière* n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.
- La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.

Théorème 9 (caractérisation séquentielle, limite programme) *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite $f(x_0)$.*

Exercice 10 Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de limite égale à 2, telle que $\lfloor u_n \rfloor$ n'admette pas de limite ($x \mapsto \lfloor x \rfloor$ désigne la fonction partie entière).

1.2 Opérations et classes de fonctions continues

Exemple 11 (admis) La plupart des fonctions usuelles sont continues sur tous les intervalles qui constituent leur ensemble de définition, notamment : les polynômes, les fonctions rationnelles, l'exponentielle, le logarithme népérien, les racines n-ièmes, la valeur absolue, les fonctions sinus et cosinus, etc.

Propriété 12 *Soit f et g deux fonctions continues en un point a (resp. sur un intervalle I) et λ un réel. Les fonctions $\lambda.f$, $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a (resp. sur I).*

Propriété 13
1. *Soit u une fonction continue en a et v une fonction continue en $u(a)$. Alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.*
2. *Soit u une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans J, et v une fonction continue sur J. Alors $v \circ u$ est continue sur I.*

Théorème 14 *Si f est une fonction dérivable en a, alors f est continue en a.*

Remarque 15 Attention, la réciproque du résultat précédent est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue et la fonction racine carrée sont continues en 0 sans être dérivable en 0.

Remarque 16 On peut construire des fonctions continue sur un intervalle, mais dérivables en aucun point de cet intervalle. L'existence de telles fonctions, très contre-intuitive, n'a été démontrée qu'au milieu du XIXe siècle. Le mathématicien Charles Hermite déclarait à leur sujet, en 1903 : « *je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées* ».

Définition 17 *On dit qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k \in \mathbf{N}$) sur un intervalle I si elle est dérivable k fois, et si sa dérivée d'ordre k est continue sur I. Par exemple, une fonction $\mathscr{C}^0$ est une fonction continue.*

Théorème 18 (limite programme) *Soit f une fonction convexe (resp. concave) sur un intervalle I ouvert. Alors f est continue sur I.*

Contre-exemple 19 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$. f est convexe, mais discontinue en 0.

2 Continuité et antécédents

2.1 Définitions

Définition 20 *Soit f une fonction définie sur un ensemble I à valeur dans un ensemble J.*

- *f est dite* surjective *si tout élément de J admet* au moins *un antécédent.*
- *f est dite* injective *si tout élément de J admet* au plus *un antécédent, c'est-à-dire si pour tous $x, y \in I$, $f(x) = f(y) \implies x = y$.*
- *f est dite* bijective *si elle est à la fois injective et surjective.*

Exemple 21 La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ $x \mapsto x^2$ n'est ni injective, ni surjective. Sa restriction à $\mathbf{R}_+$ est bijective sur $\mathbf{R}_+$.

2.2 Continuité et surjectivité

Théorème 22 (théorème des valeurs intermédiaires — essentiel) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Soit c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors l'équation $f(x) = c$ admet une solution dans $[a, b]$.*

Exercice 23 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 24 Démontrer qu'il existe deux points opposés de l'équateur qui ont la même température.

Remarque 25 Il n'y a *a priori* aucune raison que la solution soit unique.

Remarque 26 Le théorème peut être généralisé au cas des intervalles semi-ouverts, en considérant (si elles existent) les limites de la fonction aux bornes. Par exemple, si f est continue sur $\mathbf{R}$ et admet une limite négative en $-\infty$ et une limite positive en $+\infty$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle.

Exemple 27 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. En conséquence, tout réel strictement positif admet un antécédent par la fonction exp.

Exercice 28 Démontrer que tout polynôme de degré impair possède une racine.

Corollaire 29 *Si f est une fonction continue et si I est un intervalle, alors l'ensemble $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ est un intervalle.*

Remarque 30 La réciproque n'est pas vraie : on peut par exemple (mais c'est assez difficile...) construire une fonction f transformant tout intervalle en intervalle mais continue en aucun point.

Remarque 31 On peut déduire, de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, un algorithme de recherche de solution à l'équation $f(x) = c$. Par exemple, si f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ avec $f(0) \leqslant f(1)$, on propose la fonction Python suivante :

```python
def dichot(c, prec):
    u = 0
    v = 1
    while v-u > prec:
        m = (u+v)/2
        if f(m) > c:
            v = m
        else:
            u = m
    return (u+v)/2
```

Exercice 32 Exécuter l'algorithme suivant pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ au millionième.

2.3 Continuité, monotonie et injectivité

Propriété 33 *Soit f une fonction strictement monotone sur un ensemble E. Alors f est injective sur E.*

Corollaire 34 (« corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ») *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.*

Exercice 35 Soit f une fonction continue et injective sur un intervalle I. Démontrer que f est strictement monotone sur I.

3 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition 36 *On appelle* suite récurrente d'ordre 1 *une suite vérifiant une relation de la forme $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.*

3.1 Points fixes

Propriété 37 *Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite ℓ, et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

Corollaire 38 (essentiel) *Soit I un intervalle, et f une fonction continue, définie sur I, et dont l'image est contenue dans I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_{n+1}) = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite ℓ, alors celle-ci vérifie $f(\ell) = \ell$.*

Remarque 39 Attention, rien dans le théorème n'assure l'*existence* de la limite. De plus, si l'équation $\ell = f(\ell)$ admet plusieurs solutions, alors il faut déterminer laquelle est la bonne.

On ne peut donc *jamais* se contenter de chercher les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$ pour justifier la convergence de la suite.

Contre-exemple 40 La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto -x$ n'admet pas de limite, alors que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, 0.

Exercice 41 En utilisant la contraposée du corollaire 38, justifier qu'une suite $(u_n)_{n\text{ß}}$ avec $u_{n+1} = e^{u_n}$ est divergente, quelle que soit la valeur de u_0.

3.2 Étude pratique

Remarque 42 (représentation graphique) On peut représenter le comportement d'une suite récurrente vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant dans un même repère le graphe de la fonction f et la première bissectrice.

Pour étudier le comportement d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ récurrente définie par une fonction f, on peut le plus souvent appliquer l'une des méthodes suivantes. Les exercices appliquant ces méthodes sont toujours guidés en terminale.

1. Chercher un intervalle I (éventuellement $\mathbf{R}$ tout entier) contenant u_0, stable par f et sur lequel f est continue croissante. On peut alors utiliser, en le redémontrant au cas par cas, le résultat suivant :

   Propriété 43 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeur dans I, croissante sur celui-ci. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente avec $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone sur I, et son sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0$.*

   Ce faisant :

— Soit on démontre qu'elle est bornée (par exemple parce que I l'est), elle admet donc une limite que l'on peut trouver en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$ (quitte à devoir éliminer par la suite certaines solutions).

— Soit on démontre que toutes les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$ dans I sont inférieures (resp. supérieures) à u_0 alors que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante (resp. décroissante), auquel cas, par l'absurde, la suite diverge.

— Soit on démontre que l'équation $f(\ell) = \ell$ n'a pas de solution dans I, auquel cas, par l'absurde, la suite diverge.

2. Chercher un intervalle I comme précédemment, sur lequel f est continue et <u>dé</u>croissante. En ce cas, $f\circ f$ est croissante, et les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont récurrentes d'ordre 1, la fonction de récurrence concernée étant $f \circ f$. On peut alors appliquer la méthode précédente à ces deux suites indépendamment, et utiliser le résultat suivant :

   Propriété 44 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes et ont la même limite.*

   On peut aussi souvent appliquer le résultat suivant, à redémontrer au cas par cas :

   Théorème 45 (théorème des suites adjacentes) *Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante telles que $(v_n - w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 ; alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et ont une limite commune.*

3. Appliquer l'une des méthodes précédentes à la suite tronquée de ses premiers termes (par exemple, on démontrant qu'à partir d'un certain rang seulement la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dans un intervalle I comme précédemment).

Alternativement, on peut déterminer les solutions possibles en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$, puis chercher à majorer la suite $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbf{N}}$ par une suite convergente vers 0, par exemple géométrique.

Exercice 46 Déterminer la convergence et la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Exercice 47 (méthode de Héron) Soit a un réel strictement positif, $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+\frac{a}{u_n}}{2}$. Déterminer la convergence et la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 48 (difficile) Soit $u_0 \in]0, 1[$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$ converge.

Exercice 49 (fonction contractante) Soit f une fonction définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x - y|$.

On *admet* que f admet un point fixe.

1. Démontrer que ce point fixe est unique.
2. Soit $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Les acquis de ce chapitre

Démonstrations exigibles : néant.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Définition de la continuité.
2. Image d'une suite convergente par une fonction continue (sens direct de la caractérisation séquentielle).
3. Étude d'une suite récurrente d'ordre 1 définie par une fonction continue.
4. Théorème des valeurs intermédiaires et ses applications.
5. Algorithme de dichotomie et sa mise en œuvre.
6. Les fonctions dérivables sont continues.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

— Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

Principaux approfondissements.

1. Les fonctions concaves et convexes sur des ouverts sont continues.
2. Théorème des suites adjacentes.