Chapitre 7 : géométrie euclidienne dans l'espace

Valentin Melot — Terminale spé maths A

1^{er} février 2021

Dans la première section, on travaillera dans un plan. À partir de la deuxième section, on se placera dans l'espace.

Toutes les démonstrations de ce cours doivent être <u>comprises</u>. Elles font office d'exemples de raisonnement géométrique.

1 Préliminaires

1.1 Rappels de première : produit scalaire dans le plan

Définition 1 (norme) *Soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant $\overrightarrow{AB}$. La* norme *de u est égale à la longueur AB, qui ne dépend pas choix du représentant. Elle est notée $\|\vec{u}\|$.*

Définition 2 (produit scalaire) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*

Le produit scalaire *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini comme :*

- 0 *si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;*
- $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ *sinon.*

Propriété 3 *Soient A, B et C trois points de l'espace. On appelle C' le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}.$$

Propriété 4

1. *Le produit scalaire est une forme linéaire à gauche, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel λ, on a :*

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w}) \ ;$$

$$(\lambda.\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

2. *De même, le produit scalaire est une forme linéaire à droite. C'est donc une forme bilinéaire.*
3. *Le produit scalaire est une forme symétrique, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

4. *Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.*

5. A fortiori, *le produit scalaire est une forme bilinéaire positive, c'est-à-dire que pour tout vecteur* $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$.
6. A fortiori, *elle est définie positive, c'est-à-dire que* $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

Remarque 5 Ces propriétés calculatoires se démontrent par des arguments géométriques simples. Par exemple, la première égalité de la propriété 1 (additivité à gauche du produit scalaire) découle de l'invariance des aires par translation. La deuxième égalité (homogénéité à gauche) est un corollaire du théorème de Thalès.

Problème ouvert 6 Démontrer que le produit scalaire est linéaire à gauche.

Remarque 7 Le produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Théorème 8 (produit scalaire et orthogonalité) *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan.* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Théorème 9 (expression du produit scalaire à partir des coordonnées) *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs. On se place dans une* <u>*base orthonormée*</u> $(\vec{i}, \vec{j})$. *On suppose que* $\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et que* $\vec{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

1.2 Parallélisme d'un vecteur à une droite ou un plan

Définition 10 (vecteur parallèle à une droite ou un plan) *Un vecteur est dit* parallèle à une droite *s'il admet un représentant dont les extrémités appartiennent à cette droite.*

Un vecteur est dit parallèle à un plan *s'il est parallèle à une droite de ce plan.*

Remarque 11 Le vecteur nul est parallèle à toute droite et à tout plan.

(démonstration)

Propriété 12 *Soit* $\vec{u}$ *un vecteur.*

1. $\vec{u}$ *est parallèle à une droite si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*
   (i) $\vec{u} = \vec{0}$.
   (ii) $\vec{u}$ *est un vecteur directeur de la droite.*
2. $\vec{u}$ *est parallèle à un plan si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifie :*
   (i) $\vec{u} = \vec{0}$.
   (ii) *Il existe un vecteur* $\vec{v}$, *non colinéaire à* $\vec{u}$, *tel que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *dirige ce plan.*

(démonstration)

2 Définition et propriétés élémentaires du produit scalaire dans l'espace

Définition 13 (produit scalaire de représentants) *Soient A, B et C trois points de l'espace.*

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini comme le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ vus comme des vecteurs du plan (ABC).

On le note : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Définition 14 (produit scalaire de deux vecteurs abstraits) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux représentants de même origine. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. On le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Remarque 15 En toute rigueur, il faudrait démontrer, pour que cette définition ait un sens, que le réel ainsi obtenu ne dépend pas du choix des représentants. Cela provient des propriétés sur les côtés des parallélogrammes.

Remarque 16 La notation du produit scalaire dans le plan et dans l'espace est la même. Cela ne cause cependant aucune ambiguïté.

De la définition, on déduit immédiatement, en se plaçant dans un plan adapté, les propriétés suivantes :

Propriété 17 *Le produit scalaire de l'espace est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que pour tous vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ, μ, on a :*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2. $(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$;
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$;
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.

De plus $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété 18 (identités remarquables) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a :*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad ;$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad ;$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \,.$$

(démonstration)

Les formules suivantes assurent que, si l'on connaît la norme de n'importe quel vecteur de l'espace, alors on peut en déduire le produit scalaire de n'importe quel couple de vecteurs.

Propriété 19 (formules de polarisation) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \ ;$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \ ;$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \ ;$$

(démonstration)

Propriété 20 (identité du parallélogramme) *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

$$2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 .$$

(démonstration)

Remarque 21 En un sens, l'identité du parallélogramme caractérise le produit scalaire de espaces « droits » (plan et espace, par opposition à des espaces qui seraient tordus), c'est-à-dire de la géométrie euclidienne.

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Point de vue descriptif (rappels)

On rappelle les trois définitions suivantes :

Définition 22 (droites orthogonales) *Soient (d) et (d') deux droites de l'espace. Elles sont dites* orthogonales *s'il existe une droite parallèle à (d) et une droite parallèle à (d') qui sont perpendiculaires.*

Rappelons les deux définitions suivantes :

Définition 23 (droite orthogonale à un plan) *Une droite est dite orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*

Définition 24 (plans orthogonaux) *Deux plans sont dits orthogonaux si l'un est orthogonal à une droite de l'autre.*

On a vu, dans le chapitre précédents, plusieurs résultats de géométrie descriptive faisant intervenir ces notions, dont notamment le suivant :

Propriété 25 *Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.*

La suite de ce cours vise à offrir un point de vue vectoriel et à exprimer différemment certains résultats.

3.2 Point de vue vectoriel

Lemme 26 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On suppose que A, A', B, B', C et D sont huit points de l'espace tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.*

Alors $(AB) \perp (CD) \iff (A'B') \perp (CD)$.

(démonstration)

Le lemme précédent autorise la définition suivante, qui ne dépend donc pas du choix du représentant :

Définition 27 (vecteurs orthogonaux) *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si l'un est nul ou s'ils admettent des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels que $(AB) \perp (CD)$.*

On note alors : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Théorème 28 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}.$$

(démonstration)

Exemple 29 Soient A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$.

Exemple 30 Soient A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

3.3 Lien entre points de vue descriptif et vectoriel

Propriété 31 *Soient (d) et (d') deux droites de l'espace. Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :*

(i) $(d) \perp (d')$.

(ii) Il existe un vecteur directeur de (d) et un vecteur directeur de (d') qui sont orthogonaux.

(iii) Tout vecteur directeur de (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d').

(démonstration)

Propriété 32 *Soint (d) une droite et $\mathscr{P}$ un plan. Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :*

(i) $(d) \perp \mathscr{P}$.

(ii) *Il existe un vecteur directeur* $\vec{u}$ *de* (d) *et un couple* $(\vec{v}, \vec{w})$ *de vecteurs directeurs de* $\mathscr{P}$ *tels que* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

(iii) *Tout vecteur directeur de* $\vec{u}$ *est orthogonal à tout vecteur de* $\mathscr{P}$.

(démonstration)

4 Coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé

4.1 Bases orthogonales et orthonormées

Définition 33 (bases orthogonales et orthonormées) *Soient* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *trois vecteurs non nuls.*

1. $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est une* base orthogonale *si* $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ *;*
2. $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est une* base orthonormée *ou* orthonormale *si c'est une base orthogonale et si de plus* $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

La proposition suivante assure la cohérence du vocabulaire retenu.

Propriété 34 *Si* $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est une base orthonormale, alors c'est une base, c'est-à-dire que* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont non-coplanaires.*

(démonstration)

Définition 35 (repères orthonormaux et orthonormés) *Un repère orthogonal est un quadruplet* $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *où* O *est un point de l'espace et* $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est une base orthogonale.*

Un repère orthonormé est un quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *où* O *est un point de l'espace et* $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ *est une base orthonormée.*

Exemple 36 Si $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, alors $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ est un repère orthogonal.

Si $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, alors ce repère est orthonormé.

Définition 37 (coordonnées d'un vecteur et d'un point) *Soit $\mathscr{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace, et x, y et z trois réels et O un point.*

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ si et seulement si $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

On dit qu'un point A a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans le repère $(O; \mathscr{B})$ si et seulement si $\overrightarrow{OA} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + j.\vec{k}$.

Exemple 38 Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté c. Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs ayant norme 1, et même direction, même origine et même sens que respectivement $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Exprimer les coordonnées de G dans le repère $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

4.2 Expression du produit scalaire et de la norme à partir des coordonnées

Théorème 39 *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.*

(démonstration)

Remarque 40 Ce résultat est FAUX si $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormée.

Conséquence 41 *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors :*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(démonstration)

Exemple 42 Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée, $\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k}$. Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Remarque 43 On peut également démontrer le résultat sur la norme en utilisant le théorème de Pythagore, puis en déduire celui sur le produit scalaire comme corollaire grâce aux formules de polarisation. (démonstration)

Conséquence 44 *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, les coordonnées étant exprimées dans un même repère orthonormé.*

Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}.$$

(démonstration)

Conséquence 45 *On munit l'espace d'un repère orthonormé. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts. Alors :*

$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\right).$$

(démonstration)

Exemple 46 Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$?

Remarque 47 La géométrie, c'est-à-dire la mesure des angles et des longueurs, dans un espace, se déduit donc entièrement de la connaissance du produit scalaire.

En réalité, il est possible de définir une notion de « produit scalaire » [1] généralisée dans un très grand nombre d'espaces (espaces de fonctions, par exemple) et d'étudier la géométrie qui en découle.

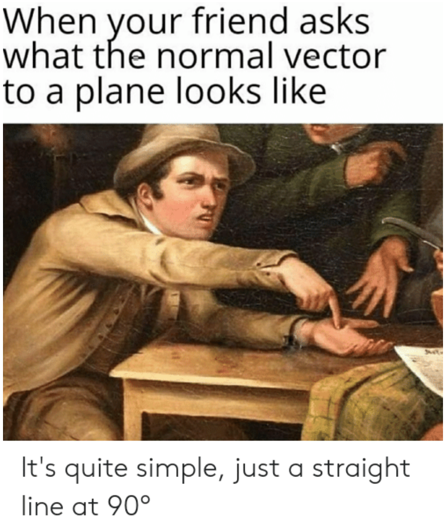
Plus généralement, l'étude des géométries « tordues » est au cœur de certains domaines scientifiques. La géodésie vise à étudier des volumes approximant la forme de la terre à des fins géographiques. La relativité générale consiste pour beaucoup à étudier la géométrie d'un espace tordu représentant l'espace-temps. La conception d'un GPS, qui exploite savamment des concepts de relativité générale (notion de temps propre) pour permettre une information géographique, repose donc sur de la géométrie très avancée.

5 Vecteurs normaux à un plan

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 48 (vecteur normal à un plan) *Soit $\mathscr{P}$ un plan, et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$. Un vecteur <u>non-nul</u> de l'espace est dit* normal *à $\mathscr{P}$ si et seulement si il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.*

1. On appelle plus généralement produit scalaire toute forme bilinéaire symétrique définie positive.



Remarque 49 Seule la direction du plan importe dans la définition précédente, et non le point de référence. En réalité, la normalité fait référence à un *plan vectoriel*, et non pas à un plan « géométrique ».

Conséquence 50 *Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles. Un vecteur est normal à $\mathscr{P}$ si et seulement s'il est normal à $\mathscr{P}'$.*

(démonstration)

Conséquence 51 *Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils admettent un vecteur normal commun.*

(démonstration)

Propriété 52 (admise) *Soit $\mathscr{P}$ un plan. Il existe un vecteur normal à $\mathscr{P}$.*

Remarque 53 *A priori*, rien n'assure la validité du résultat précédent — sinon l'intuition géométrique.

Un sujet traité en approfondissement proposera de travailler sur la notion de produit vectoriel, qui permet de construire un vecteur normal à n'importe quel plan. En outre, les questions d'existence de vecteurs « complétant » une base, seront formalisées en L1. Elles permettront notamment de donner sens à la notion intuitive de dimension.

Théorème 54 *Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.*

Un vecteur non-nul est normal à $\mathscr{P}$ si et seulement s'il est colinéaire à $\vec{n}$.

(démonstration)

Remarque 55 Soient $\mathscr{P}$ un plan et $d \in \mathbf{R}_+^*$. Il existe donc *exactement* deux vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ de norme d, qui ont sens opposé.

(démonstration)

Théorème 56 *Soit $\mathscr{P}$ un plan, $A \in \mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$.*
Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points B tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

(démonstration)

Remarque 57 De même que l'existence d'un vecteur normal à un plan fixé, l'existence d'un plan normal à un vecteur fixé est admise à notre niveau. Elle sera facilement démontrée avec le formalisme des espaces vectoriels, introduit en L1.

Remarque 58 Si A est un point et $\vec{n}$ un vecteur non-nul, on peut donc parler du plan normal à $\vec{n}$ passant par A, qui existe et est unique. Celui-ci est généralement noté sous la forme : $\mathscr{P}(A; \vec{n})$.

Cette description d'un plan est plus « légère » que celle reposant sur un point et un couple de vecteurs directeurs.

Remarque 59 (équation cartésienne) On munit l'espace d'un repère orthonormé.

Soit $\mathscr{P}$ un plan, $A(x_A, x_B, x_C)$ un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Alors un point $B(x, y, z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement s'il vérifie l'équation affine suivante :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + k = 0$$

où $k = -\alpha x_A - \beta y_A - \gamma z_A$.

Une telle équation, dite *cartésienne* caractérise entièrement le plan. Nous étudierons de façon plus approfondie de telles équations dans le dernier chapitre de géométrie.

Exemple 60 (plan tangent à une sphère en un point) Soient A et B deux points. Donner une équation du plan tangent en B à la sphère de centre A et passant par B.

5.2 Caractérisation de l'orthogonalité par des vecteurs normaux

Propriété 61 *Soient (d) une droite et $\mathscr{P}$ un plan. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) $(d) \perp \mathscr{P}$.

(ii) Il existe un vecteur directeur de (d) *et un vecteur normal à* $\mathscr{P}$ *qui sont colinéaires.*

(iii) Tout vecteur parallèle à (d) *est colinéaire à tout vecteur normal à* $\mathscr{P}$*.*

(démonstration)

Propriété 62 *Soient* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *deux plans. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$*.*

(ii) Il existe un vecteur normal à $\mathscr{P}$ *qui est parallèle à* $\mathscr{P}'$*.*

(iii) Tout vecteur normal à $\mathscr{P}$ *est parallèle à* $\mathscr{P}'$*.*

(iv) Il existe un vecteur normal à $\mathscr{P}$ *et un vecteur normal à* $\mathscr{P}'$ *qui sont orthogonaux.*

(v) Tout vecteur normal à $\mathscr{P}$ *est orthogonal à tout vecteur normal à* $\mathscr{P}'$*.*

(démonstration)

6 Projections orthogonales, distance à une droite ou un plan

On commence par admettre un résultat intuitif de géométrie euclidienne, nécessaire pour toute la suite.

Lemme 63 (admis) *Soit* A *un point,* (d) *une droite et* $\mathscr{P}$ *un plan.*

1. *Il existe une unique droite perpendiculaire à* (d) *passant par* A*.*
2. *Il existe une unique droite perpendiculaire à* $\mathscr{P}$ *passant par* A*.*

Définition 64 (projeté orthogonal sur une droite ou un plan) *Soient* A *un point,* (d) *une droite et* $\mathscr{P}$ *un plan.*

1. *Le* projeté orthogonal *de A sur (d) est le point d'intersection entre (d) et l'unique droite perpendiculaire à (d) passant par A.*
2. *Le* projeté orthogonal *de A sur $\mathscr{P}$ est le point d'intersection entre $\mathscr{P}$ et l'unique droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A.*

Remarque 65 Le projeté orthogonal d'un point sur une droite (resp. un plan) à laquelle (resp. auquel) il appartient est le point lui-même.

Définition 66 (distance d'un point à un ensemble) *Soit A un point, et E un plan ou une droite de l'espace.*

La distance de A à E, *notée $d(A, E)$, est la distance entre A et le point A' de E le plus proche de A, c'est-à-dire :*

$$d(A, E) = \min_{A' \in E} AA'.$$

Remarque 67 Cette définition n'a de sens que parce qu'il existe bien un point A' de E qui minimise cette distance. Cela n'est pas vrai pour n'importe quel ensemble E.

Contre-exemple 68 Soit C un point de l'espace. On appelle $B(C, 1)$ l'ensemble $\{P : BP < 1\}$. Si $A \notin B(C, 1)$, alors il n'existe pas de point $A' \in C$ qui minimise la distance A.

Remarque 69 (HP) La définition de la distance d'un point à un ensemble peut toutefois être étendue :

— Sans modification, à tous les ensembles E qui garantissent l'existence de ce minimum. Ces ensembles sont les ensembles qui « contiennent leur bord ». On les appelle les fermés non-vides de l'espace. Ils seront étudiés de façon approfondie en L2.

— À n'importe quel ensemble non-vide de points de l'espace, à condition de généraliser la notion de minimum. Il faut pour cela introduire le concept de borne inférieure, qui représente une distance que l'on ne peut atteindre mais que l'on peut approcher sans jamais la franchir. Une telle notion sera introduite formellement en début de L1.

À noter que l'on n'a pas, en général, de garantie d'unicité du point A'. Autrement dit, il peut exister deux points qui minimisent la distance.

Dans tous les cas, il doit être fait appel à l'idée d'infiniment petit, appliquée à la géométrie. L'étude de l'infiniment petit dans l'espace s'appelle la topologie.

Théorème 70 (projeté orthogonal sur un plan et distance) *Soit $\mathscr{P}$ un plan et A un point de l'espace. Soit A' le projeté orthogonal de A sur P.*

Le point A' est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A, c'est-à-dire l'unique point de $\mathscr{P}$ qui minimise la distance à A.

Autrement dit, on a : $AA' = d(A, \mathscr{P})$, et le point A' est le seul à avoir cette propriété.

(démonstration exigible)

Théorème 71 (projeté orthogonal sur une droite et distance) *Soit (d) une droite et A un point de l'espace. Soit A' le projeté orthogonal de A sur (d).*

Le point A' est le point de (d) le plus proche de A.

(démonstration en exercice)

Remarque 72 On pourrait, alternativement, définir le projeté orthogonal sur un plan (resp. sur une droite) comme le point minimisant la distance à celui-ci (resp. celle-ci), dont on pourrait prouver l'existence et l'unicité avec des arguments analytiques (que nous étudierons dans le cours sur la continuité). Il serait alors possible de prouver que la droite reliant un point à son projeté est perpendiculaire à la droite (resp. au plan) considéré, ce qui ferait de la définition 64 une propriété du projeté orthogonal, et permettrait de démontrer le lemme 63.

Remarque 73 (HP) Soit A un point de l'espace et E un ensemble de points.

Si E est un ensemble fermé, alors il existe au moins un point A' de E qui minimise la distance à A.

Si E est un ensemble convexe, alors il existe au plus un point A' de E qui minimise la distance à A.

Donc si E est un convexe fermé, alors il existe exactement un tel point A'. Par analogie, ce point A' est appelé le projeté orthogonal de A sur E.

L'opération de projection orthogonale sur un convexe quelconque a des propriétés essentielles pour de nombreuses branches de mathématiques, qui seront étudiées à partir de la L1.

Théorème 74 *Soit A un point et $\mathscr{P}(B, \vec{n})$ un plan.*

$$d(A, \mathscr{P}) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}.$$

(démonstration)

Théorème 75 *Soit A un point et (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et passant par B.*

$$d(A, (d)) = \sqrt{AB^2 - \frac{\left(\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}\right)^2}{\vec{u}^2}}.$$

(démonstration)

Exemple 76 Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur non-nul unitaire et α un réel.

Que peut-on dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \alpha$?

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible :

1. Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Définition et propriétés essentielles du produit scalaire dans l'espace.
2. Identités remarquables et formules de polarisation.
3. Expression du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance entre deux points, de la valeur d'un angle à partir des coordonnées dans un repère orthonormé.
4. Caractérisations de l'orthogonalité à partir du produit scalaire en utilisant des vecteurs directeurs ou normaux.
5. Recherche d'un projeté orthogonal sur un plan ou une droite, calcul d'une distance à un plan ou une droite.
6. Résolution de problème de lieux, c'est-à-dire recherche de points vérifiant une certaine propriété, faisant intervenir le produit scalaire.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises : toutes, en veillant à bien comprendre quelles sont les propriétés déjà démontrées et celles qui ne l'ont pas encore été.

Principaux approfondissements.

1. Preuve géométrique de la bilinéarité du produit scalaire dans le plan.
2. Équations cartésiennes de plans (fera l'objet d'un chapitre dédié ultérieurement).
3. Propriétés faisant intervenir l'orthogonalité de deux plans (à la limite du programme).