Chapitre 6 : compléments sur la dérivation et convexité

Valentin Melot — Terminale spé maths A

18 janvier 2021

1 Règles de calcul de dérivées

1.1 Définition et caractérisation

Définition 1 (nombre dérivé d'une fonction en un point) *Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$, et $x_0 \in]a,b[$.*

La fonction f est dite dérivable en x_0 *lorsque la limite suivante existe et appartient à $\mathbf{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0*, et est notée $f'(x_0)$.*

Remarque 2 Par composition avec la fonction $h \mapsto x_0 + h$, l'existence de la limite précédente équivaut à l'existence de :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

L'utilité fondamentale de la dérivation consiste à permettre une approximation d'une fonction potentiellement complexe par une fonction affine, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3 (HP) *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$, et $x_0 \in]a,b[$.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \alpha$.

(ii) Il existe une fonction $R :]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in]a,b[,\ f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + R(x)(x-x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0. \end{cases}$$

(démonstration à comprendre)

Corollaire 4 (règle de L'Hôpital, HP) *Soient x_0 un réel, f et g deux fonctions s'annulant en x_0 et dérivables en x_0, avec $g'(x_0) \neq 0$. On a :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Le résultat suivant en fournit une interprétation géométrique :

Propriété 5 (rappel de première) *Soit f une fonction définie sur un intervalle* $]a,b[$. *Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.*

Si f est dérivable en un point $x_0 \in]a,b[$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une droite tangente T_{x_0} au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

L'équation réduite de cette droite est alors :

$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(démonstration exigible)

Remarque 6 On pourrait étendre la définition de la dérivée au cas où la limite existe et est égale à $\pm\infty$. Cette situation correspond à une tangente verticale.

Remarque 7 (dérivées à gauche et à droite) Il peut arriver que la limite de la définition 1 n'existe pas, mais que le taux de variation admette une limite à gauche ou une limite à droite, qui peuvent être différentes.

Dans cette situation, on dit que la fonction f admet, en x_0, une *dérivée à gauche* ou une *dérivée à droite*. On peut noter ces demi-dérivées $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ (notation non-standard).

Si f est dérivable à gauche en x_0, alors $\mathscr{C}_f$ admet en $(x_0, f(x_0))$, une *demi-tangente* à gauche d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. *Mutatis mutandis* si f est dérivable à droite.

Si f est définie sur $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, alors il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \alpha$.

(ii) f est dérivable à gauche et à droite en x_0, et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = \alpha$.

Exemple 8 (fonction valeur absolue)

Définition 9 (fonction dérivée) *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ et $x_0 \in]a,b[$.*

La fonction f est dite dérivable *sur $]a,b[$ si elle est dérivable en tout point de l'intervalle $]a,b[$.*

On note $f' : x \mapsto f'(x_0)$ sa fonction dérivée.

1.2 Rappel : opérations élémentaires sur les dérivées

Propriété 10 (rappel de première) *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$; $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*

1. *Si f et g sont dérivables en un point $x_0 \in]a, b[$, alors $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en x_0, et*
$$(\lambda.f + \mu.g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$
2. *Si f et g sont dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, alors $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur $]a, b[$ et*
$$(\lambda.f + \mu.g)' = \lambda.f' + \mu.g'.$$

(démonstration à comprendre)

Remarque 11 On dit que l'opérateur de dérivation en x_0 et l'opérateur de dérivation sur l'intervalle $]a, b[$ sont *linéaires.*

Propriété 12 (rappel de première) *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$.*

1. *Si f et g sont dérivables en un point $x_0 \in]a, b[$, $f \times g$ est dérivable en x_0 et*
$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0.)$$
2. *Si f et g sont dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, alors $f \times g$ est dérivable sur $]a, b[$ et*
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

(démonstration exigible)

1.3 Dérivée d'une composée

Définition 13 (composée, cas général) *Soient E, F et G trois ensembles, $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux applications.*

On appelle composée *de u par v la fonction suivante :*

$$\begin{array}{cccc} v \circ u & : & E & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & v(u(x)). \end{array}$$

Définition 14 (composée de deux fonctions de la variable réelle) *Soient u et v deux fonctions réelles. La* composée de u par v *est la fonction $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$.*

Son ensemble de définition est l'ensemble des points $x \in \mathbf{R}$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

(i) u est définie en x

(ii) v est définie en $u(x)$.

Remarque 15 On vérifie aisément que si u, v et w sont des applications, alors $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$. On peut alors simplement écrire $u \circ v \circ w$. Il est facile de déterminer l'ensemble de définition d'une telle composée.

On dit que la composée est une opération *associative.*

Remarque 16 De façon générale, on n'a pas $u \circ v = v \circ u$. La composition n'est pas une opération *commutative.*

Exemple 17 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Écrire et donner les ensembles de définition des fonctions suivantes : $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h \circ g$.

Théorème 18 (dérivation d'une composée) *Soient u et v deux fonctions réelles et x_0 un réel. On suppose que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(i) u est dérivable en x_0 ;

(ii) v est dérivable en $u(x_0)$.

Alors $v \circ u$ est dérivable en x_0, et l'on a :

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v' \circ u(x_0).$$

RETENIR : « v rond u ... prime = u prime fois v prime rond u ».

(démonstration à comprendre — on admet que le fait que u est dérivable en x_0 implique que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$)

Corollaire 19 (dérivées usuelles) *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $k \in \mathbf{Z}$. On a, sur I et sous réserve que les fonctions suivantes soient bien définies :*

$$(e^u)' = u' \times e^u \ ; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \ ; \quad \left(u^k\right)' = ku' \times u^{k-1} \ ; \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Corollaire 20 *Soit f une fonction réelle et dérivable. La dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto af'(ax+b)$, partout où celle-ci est définie.*

Corollaire 21 (dérivée d'un quotient) *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur I. Alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Théorème 22 (HP) *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective, et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ sa bijection réciproque.*

Soit $x \in J$. Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en x et :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

(démonstration à comprendre)

Exemple 23 Calcul de la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$.

2 Dérivées itérées

2.1 Dérivée seconde

Définition 24 (dérivée seconde) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. Si f' est dérivable en un point $x_0 \in]a, b[$, on dit que f est* deux fois dérivable en x_0.

On note : $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

Si de plus f' est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, alors f est dite deux fois dérivable sur $]a, b[$ *et l'on note $f'' = (f')'$ sa* dérivée seconde.

Exemple 25 — Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. La dérivée seconde de $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est :
- — La dérivée seconde de exp est :
- — La dérivée seconde de $x \longmapsto \sqrt{x}$ est :
- — Soient u et v deux fonctions. La dérivée seconde de $v \circ u$ est :

Propriété 26 *La dérivée seconde est une opération linéaire.*

(démonstration)

Propriété 27 *Soient u et v deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. La fonction $u \times v$ est deux fois dérivable sur I et vérifie :*

$$(u \times v)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

(démonstration)

2.2 Dérivées aux ordres supérieurs

On définit la notion de dérivée n-ième par récurrence :

Définition 28 (dérivation multiple sur un intervalle) *Soit u une fonction définie sur un intervalle I et $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction u est dite n* fois dérivable *sur I :*
- — *Pour $n = 1$, si u est dérivable sur I. On note : $u^{(1)} = u'$.*
- — *Pour $n \geqslant 2$, si u est $n - 1$ fois dérivable sur I et si $u^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On note : $u^{(n)} = (u^{(n-1)})'$.*

On note par ailleurs : $u^{(0)} = u$.

Définition 29 (dérivation multiple en un point) *Soit u une fonction définie au voisinage de x_0 et $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction u est dite n fois dérivable en x_0 si elle est $n - 1$ fois dérivable au voisinage de x_0, et si $u^{(n-1)}$ est dérivable en x_0.*

Définition 30 (infinie dérivabilité) *Une fonction u est dite* infiniment dérivable *sur I si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, elle est dérivable n fois sur I.*

Exemple 31 — Toute fonction polynomiale est infiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.
- — La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Propriété 32 *L'opération dérivée n-ième est linéaire.*

(démonstration)

Théorème 33 (formule de Leibniz) *Soient u et v deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.*

La fonction $u \times v$ est n fois dérivable sur I, et vérifie :

$$(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

(démonstration à comprendre)

Remarque 34 De même que la dérivabilité d'une fonction en un point équivaut à la possibilité de l'approximer par une fonction affine (polynôme de degré 1), la dérivabilité aux ordres supérieures est reliée à la possibilité d'approximer une fonction par des polynômes de degré supérieur.

On pourra démontrer en fin d'année [1] que <u>si</u> une fonction u est dérivable n fois en x_0, <u>alors</u> il existe une fonction R_n de limite nulle en x_0 telle que :

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)(x - x_0)^n.$$

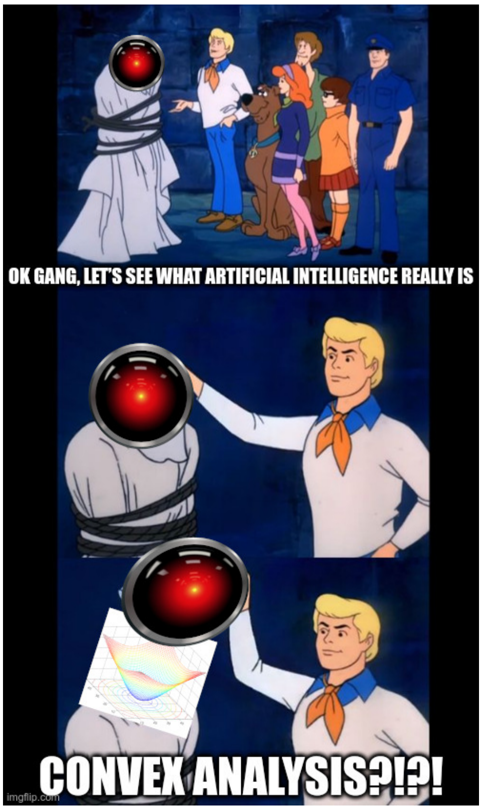
Attention, ce n'est PAS une équivalence !

Problème ouvert 35 Démontrer que le résultat précédent est vrai lorsque u est une fonction polynomiale. En particulier, on pourra montrer que si n est le degré du polynôme, R_n est la fonction nulle.

3 Concavité et convexité

De même que la connaissance du signe de la dérivée d'une fonction, la connaissance du signe de sa dérivée *seconde* nous donne des informations sur celle-ci. Ces informations sont la connaissance de ce que l'on appelle la *convexité* d'une fonction, c'est-à-dire son caractère « bombé à l'endroit » ou « bombé à l'envers ». Les fonctions convexes sont indispensables dans de nombreuses branches des mathématiques, pures comme appliquées, et en sciences [2].

1. Une fois vue la théorie de l'intégration.
2. Quelques exemples : en microéconomie, pour modéliser les préférences d'un consommateur ; en intelligence artificielle pour calculer des optima ; en physique pour étudier les espaces de solutions d'équations aux dérivées partielles difficiles…



Remarque 36 Comme nous le verrons, il existe des liens forts entre la notion de convexité et celle de dérivabilité. Cependant, diverses subtilités (problèmes de définition d'un concept, réciproque d'une implication qui devient fausse, etc.) apparaissent lorsque la fonction étudiée n'est pas dérivable en un point.

Le cours suivant veille, dans la mesure du raisonnable, à présenter des résultats valables en toute généralité et à éviter de restreindre abusivement les hypothèses. Cependant, l'étude de ces complications n'est pas le cœur du programme, et la plupart des fonctions étudiées en pratique seront des fonctions deux fois dérivables sur les intervalles considérés, à l'exception notable de la fonction $x \mapsto |x|$.

À noter qu'en réalité, les problèmes de non-dérivabilité et les subtilités qui s'ensuivent n'apparaissent « presque nulle part », dans un sens qu'il est possible de définir rigoureusement. Les outils qui permettent de formaliser cette idée de « presque nulle part » et les démonstrations qui s'ensuivent sont toutefois hors programme, et seront vus en deuxième année de licence — mais ils peuvent donner lieu à une problématique de grand oral en lien avec la définition de ce qu'est l'infini.

3.1 Définition, propriétés immédiates

Définition 37 (partie convexe du plan) *Soit E un sous-ensemble du plan. E est dit convexe si, pour tous points A et B appartenant à E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.*

Exemple 38
— Le plan tout entier est convexe.
— Un disque est convexe.

— Un polygone (plein) est convexe.
— Une droite est convexe.
— L'ensemble vide est convexe.

Contre-exemple 39 Un cercle n'est pas convexe.

Définition 40 (fonction convexe, définition géométrique) *Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.*

La fonction f est dite convexe *sur l'intervalle I si, pour tous $a, b \in I$, le segment reliant les points $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$ est situé au-dessus de la courbe représentative de f.*

Un tel segment est appelé une *corde* ou une *sécante* de $\mathscr{C}_f$.

Exemple 41 (exemples de référence I) — Les fonctions affines sont convexes sur $\mathbf{R}$.
— La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
— La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

(démonstration)

Exemple 42 (exemples de référence II, provisoirement admis) — Les fonctions $x \mapsto x^n$ sont toutes convexes sur $\mathbf{R}_+$.
— Les fonctions $x \mapsto x^{2n}$ sont toutes convexes sur $\mathbf{R}$ (mais pas les fonctions x^{2n+1}).
— La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.
— La fonction inverse est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.

Ces exemples seront démontrés après le théorème 59.

Remarque 43 ATTENTION : la convexité est indépendante du sens de variation. Une fonction convexe peut être croissante, décroissante ou non-monotone.

Propriété 44 (lien entre les deux notions) *Une fonction f définie est convexe sur un intervalle I si et seulement si l'ensemble*[3] $\{(x,y) \in I \times \mathbf{R} \ : y \geqslant f(x)\}$ *est convexe.*

Théorème 45 (propriété des milieux, essentiel) *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $x, y \in I$. Alors :*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Nous utiliserons abondamment cette propriété ultérieurement. Elle est en fait un simple cas particulier de la propriété qui suit.

Lemme 46 (paramétrisation d'un segment, limite programme, admis)

1. *Soit $a < b$ deux réels. L'intervalle $[a,b]$ est l'ensemble $\{ta + (1-t)b \ : t \in [0,1]\}$.*
2. *Soit A et B deux points d'un plan muni d'un repère. Les coordonnées des points du segment $[AB]$ forment l'ensemble suivant :*

$$\{(tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B) \ : t \in [0,1]\}.$$

Propriété 47 (caractérisation algébrique de la convexité par les cordes) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si pour tous $a, b \in I$ et $t \in [0,1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

(démonstration à comprendre)

3.2 Propriétés des fonctions convexes dérivables

Lemme 48 (lemme des trois pentes ou des trois cordes, fondamental, HP) *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, et $(a,b,c) \in I^3$ tels que $a < b < c$.*

On a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

(démonstration)

3. Cet ensemble est appelé l'*épigraphe* de f.

Remarque 49 Le lemme des trois pentes peut s'énoncer d'une façon un peu différente. Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a, b]$. On pose pour tous $x \neq y \in I$:

$$\tau_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Alors :

— Si x est fixé, la fonction $y \mapsto \tau_f(x, y)$ est croissante sur $[a, y[$ et sur $]y, b]$.
— Si y est fixé, la fonction $x \mapsto \tau_f(x, y)$ est croissante sur $[a, x[$ et sur $]x, b]$.

Théorème 50 (position relative des tangentes) *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$.*

Alors pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Autrement dit la courbe représentative de f est située au-dessus de sa tangente en x_0.

(démonstration à comprendre)

Remarque 51 On retient donc qu'une fonction convexe est SUR ses tangentes et SOUS ses sécantes.

Remarque 52 *A priori*, rien ne garantit l'existence de la tangente précédente. Mais en réalité, en application du théorème de la limite monotone, il existe toujours deux demi-tangentes à gauche et à droite. Ceci illustre la puissance des liens entre limite et monotonie.

(démonstration à comprendre)

Théorème 53 *Si f est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction f' est croissante.*

(démonstration à comprendre)

Théorème 54 *Si f est une fonction convexe et deux fois dérivable sur un intervalle I, alors la fonction f'' est positive.*

(démonstration)

3.3 Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables

On change désormais de point de vue : on *suppose* que f est une fonction suffisamment régulière, et l'on énonce des conditions suffisantes pour avoir la convexité.

ATTENTION : une fonction convexe sur un intervalle n'est pas forcément dérivable sur celui-ci (penser à $x \mapsto |x|$), même si elle l'est « presque partout ».

Lemme 55 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I telle que f'' est positive sur I. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.*

Alors quel que soit $x_0 \in I$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0.

(démonstration exigible)

Remarque 56 On a en fait prouvé, plus généralement, que si f était simplement dérivable et de dérivée croissante sur I, alors elle était au-dessus de ses tangentes.

Lemme 57 *Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si pour tout $x_0 \in I$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0, alors f est convexe.*

(démonstration à comprendre)

On en déduit immédiatement les deux caractérisations suivantes, essentielles :

Théorème 58 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.*

Théorème 59 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si f'' est positive sur I, alors f est convexe sur I.*

Remarque 60 On en déduit immédiatement une preuve de l'exemple 42.

Remarque 61 Les résultats sur la stabilité de l'ensemble des fonctions convexes par somme et par multiplication par un réel positif ne sont pas au programme : en réalité, c'est grâce aux théorèmes précédents qu'on peut montrer, en contexte, qu'une combinaison linéaire positive de fonctions convexes de référence est convexe.

Exemple 62 La fonction $x \mapsto e^x + x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

3.4 Quelques éléments sur la dérivabilité des fonctions convexes (HP)

La présente section vise à apporter quelques éclaircissements sur ce que la convexité implique vis-à-vis de la dérivabilité des fonctions.

Théorème 63 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle ouvert I. Si f est convexe, alors les cinq propositions suivantes sont vraies :*

(i) f est dérivable à gauche en tout point de I.

(ii) f est dérivable à droite en tout point de I.

(iii) f'_g est croissante sur I.

(iv) f'_d est croissante sur I.

(v) Pour tout $x \in I$, $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

(démonstration laissée en exercice ; chacun des points précédents se démontre en appliquant astucieusement le lemme des trois pentes)

Remarque 64 Si f est une fonction convexe, pour qu'elle soit dérivable en un point x, il suffit donc que l'inégalité $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ soit une égalité, c'est-à-dire que la limite à gauche et la limite à droite du taux de variation soient égales.

On peut ensuite démontrer que l'ensemble des points sur lesquels l'inégalité est strict est « négligeable », c'est-à-dire que cela n'arrive « presque jamais ». Certes, le nombre de points où cela survient peut être infini, mais dans le pire des cas c'est un « petit » infini [4].

Problème ouvert 65 Construire une fonction convexe qui possède un nombre infini de points de non-dérivabilité.

Théorème 66 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Il suffit, pour que f soit convexe, que l'une des conditions suivantes soit réunies :*

(i) f est dérivable à gauche en tout point et f'_g est croissante ;

(ii) f est dérivable à droite en tout point et f'_d est croissante.

3.5 Concavité

Définition 67 (fonction concave) *Une fonction est dite* concave *sur un intervalle si son opposée est convexe sur le même intervalle.*

Il en résulte que tous les résultats suivants peuvent être adaptés en prenant soin d'adapter les sens des inégalités. Nous nous contentons d'en énoncer quelques-uns dans les théorèmes suivants :

Théorème 68 *Soit f une fonction concave sur un intervalle I.*

1. f est située au-dessus de ses cordes.

4. Le même infini que celui des entiers naturels — et donc beaucoup moins que l'infini des nombres réels.

2. *f est située au-dessous de ses tangentes.*

Théorème 69 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :*

1. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*
2. *On suppose de plus f deux fois dérivable sur I. f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.*

Exemple 70 — La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbf{R}_+$.
- — Les fonctions $x \mapsto x^{2n+1}$ sont concaves sur $\mathbf{R}_-^*$.
- — Les fonctions affines sont concaves sur $\mathbf{R}$.
- — Toute fonction du second degré est soit concave sur $\mathbf{R}$, soit convexe sur $\mathbf{R}$.
- — La fonction inverse est concave sur $\mathbf{R}_-^*$.

Problème ouvert 71 Soit I un intervalle. Décrire l'ensemble des fonctions f qui sont à la fois concaves et convexes sur I.

4 Application de la convexité et études de fonctions

4.1 Étude de la convexité d'une fonction

Définition 72 (point d'inflexion) *Soit $\mathscr{C}$ une courbe et $A \in \mathscr{C}$.*
A est appelé un point d'inflexion *de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ possède une tangente en A qu'elle traverse.*

Théorème 73 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$, et $c \in]a, b[$.*
Si f est concave sur $]a, c[$ et convexe sur $]c, b[$ (ou l'inverse), alors le point de coordonnées $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

(démonstration)

Remarque 74 On dit que f « change de convexité » en c.

Aussi, lorsqu'il est demandé en exercice d'étudier la convexité d'une fonction, on cherchera à déterminer les variations de f' pour conclure.

Exemple 75 (courbe en cloche) Soit $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Effectuer une étude complète de f, puis tracer une esquisse de sa courbe représentative.

On cherche donc à déterminer :

— Les variations de f,

— Ses extrema,

— Ses limites,

— Les intervalles sur lesquels elle est concave ou convexe,

— Ses points d'inflexion,

— Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'inflexions.

4.2 Inégalités de convexité et de concavité

On appelle « inégalité de convexité » ou « inégalité de concavité » une inégalité pouvant être démontrée en utilisant le fait qu'une fonction est convexe ou concave. Ces inégalités s'obtiennent :

— « par les cordes » : en appliquant à une fonction bien choisie la propriété 47 ;

— « par les tangentes » : en appliquant à une fonction bien choisie le théorème 50 ;

ou leurs homologues pour les fonctions concaves.

Les résultats suivants doivent être redémontrés à chaque utilisation, mais ils sont à bien comprendre, et leur rédaction à maîtriser.

Théorème 76 (inégalité arithmético-géométrique, ultra-classique) *Soit x et y deux nombres réels positifs. On a :*

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Théorème 77 *Soit $x \in \mathbf{R}$. $e^x \geqslant 1 + x$.*

Exemple 78 Soit $x \in \mathbf{R}^+$. $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Exemple 79 Soit x et y deux réels positifs. On a :

$$x^2y + xy^2 \leqslant x^3 + y^3.$$

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible :

1. Dérivée d'un produit (rappel de première).
2. Équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction (rappel de première).
3. Si f'' est positive, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Calculer sans hésiter la dérivée d'une composée ($u' \times v' \circ u$).
2. Définir, calculer et manipuler la dérivée seconde d'une fonction.
3. Connaître les propriétés géométriques d'une fonction convexe ou concave : position par rapport à ses sécantes et ses tangentes, allure générale.
4. Caractériser une fonction convexe ou concave suffisamment régulière : par les variations de sa dérivée, par le signe de sa dérivée seconde.
5. Connaître, savoir manipuler, savoir démontrer des inégalités de convexité avec des fonctions simples, découlant de la caractérisation de la convexité par :
   (a) les tangentes (par exemple : $e^x \geqslant 1 + x$)
   (b) les cordes (par exemple : $\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{e^x+e^y}{2}$.
6. Prolonger l'étude d'une fonction par la recherche des intervalles sur lesquelles elle est convexe ou concave, de ses points d'inflexion.
7. Esquisser l'allure générale d'une fonction à partir du tableau de variations de sa dérivée ou du signe de sa dérivée seconde.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

1. Formule de dérivation d'une composée.
2. Formule de dérivation de la réciproque.
3. Convexité de la fonction carré.
4. Caractérisation algébrique de la convexité par les cordes.
5. Les corollaires du lemme des trois pentes :
   (a) Si f est convexe et dérivable en x, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_x.
   (b) Si f est convexe et dérivable, alors sa dérivée est croissante.
6. Si f est dérivable et au-dessus de ses tangentes, alors elle est convexe.

Principaux approfondissements.

1. Démontrer par récurrence, de façon guidée, des propriétés de fonctions impliquant des dérivées à l'ordre n (par exemple, la formule de Leibniz).
2. Calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction en appliquant la formule de composition.
3. Faire le lien entre dérivabilité et approximation par une fonction affine.
4. Démontrer et appliquer dans des cas simples le lemme des pentes.