Chapitre 5A : préliminaires aux probabilités

Valentin Melot — Terminale spé maths A

4 janvier 2021

Le but du présent chapitre est d'introduire une présentation formalisée et rigoureuse des concepts au programme de probabilités. Si une minutie extrême ne fait pas partie des attendus du programme, il est souhaitable de formaliser les objets manipulés pour partir sur des bases rigoureuses.

1 Espaces probabilisés

On considère en probabilités un <u>univers</u>, qui est un ensemble correspondant à toutes les possibilités considérées. Ses éléments sont appelés des <u>événements élémentaires</u> ou des <u>issues</u>.

Exemple 1 Une expérience de probabilités consiste à tirer une carte dans un jeu de 52 cartes. L'univers est alors :

$$\Omega_1 = \{2\heartsuit; 3\heartsuit; \ldots; R\heartsuit; A\heartsuit; 2\clubsuit; \ldots; R\spadesuit; A\spadesuit\}$$

Exemple 2 Une expérience de probabilités consiste à tirer deux élèves parmi la classe. L'univers est alors :

$$\begin{aligned}\Omega_2 = \big\{&(\text{Amandine}; \text{Amandine}); (\text{Amandine}; \text{Valentine}); (\text{Amandine}; \text{Luc}); \ldots;\\ &(\text{Bertille}; \text{Axel}); (\text{Bertille}; \text{Élise}); (\text{Bertille}; \text{Bertille})\big\}\end{aligned}$$

Une situation étudiée dont on voudra mesurer la probabilité est appelée un <u>événement</u>. Un événement se modélise comme un ensemble d'événements élémentaires, c'est-à-dire comme un sous-ensemble de l'univers

Exemple 3 Reprenons notre jeu de cartes. On peut considérer un événement « on tire un as » :

$$A = \{A\heartsuit; A\clubsuit; A\diamondsuit; A\spadesuit\}$$

Cet événement est composé de treize éléments élémentaires — dit autrement, il a un cardinal égal à 13.

On peut aussi considérer un événement « on tire le valet de cœur » :

$$B = \{V\heartsuit\}$$

Cet événement est constitué d'un unique événement élémentaire.

À noter que *la connaissance de l'univers ne dit rien sur la probabilité de chaque événement.*

Contre-exemple 4 On considère une pièce équilibrée que l'on tire à pile ou face. L'univers est $\Omega_3 = \{P; F\}$.

Om tire désormais à pile ou face une pièce truquée, qui a 90 % de chances de tomber sur pile. L'univers est également $\Omega_3 = \{P; F\}$.

Pour modéliser complètement une situation [1], il est donc nécessaire d'indiquer également quelles sont les probabilités en jeu. Il y a pour cela deux possibilités :

— Soit l'on se donne les probabilités de chaque événement élémentaire, c'est-à-dire une famille finie $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$. Ces probabilités sont positives, et de somme égale à 1. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

— Soit l'on se donne une application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$, qui à tout événement associe sa probabilité. Elle doit vérifier plusieurs propriétés fondamentales, notamment le fait que $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ou si A et B sont des événements disjoints, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Définition 5 (fonction de probabilité) *Une telle application* $\mathbf{P}$ *est appelée une* fonction de probabilité *sur* Ω*, ou plus simplement une* probabilité *sur* Ω*.*

Remarque 6 On passe de l'un à l'autre des formalismes en remarquant que si ω est un événement élémentaire, alors $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, et que si A est un événement, alors

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Avec ces deux données, la modélisation de la situation est complète.

Exemple 7 Reprenons l'exemple du tirage de cartes. On se place en situation d'équiprobabilité $\mathbf{P}_1$, c'est-à-dire que toutes les cartes ont la même probabilité de sortir. On a donc donc pour tout $\omega \in \Omega_1$, $p_\omega = \frac{1}{52}$.

Si A désigne l'événement « on tire un as », on a :

$$\mathbf{P}_1(A) = p_{A\heartsuit} + p_{A\clubsuit} + p_{A\diamondsuit} + p_{A\spadesuit} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Exemple 8 On tire une pièce truquée qui a 25 % de chances de tomber sur pile. L'univers est $\Omega_3 = \{P; F\}$. La probabilité est l'application $\mathbf{P}_3 : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :

$$\mathbf{P}_3(\varnothing) = 0 \ ; \quad \mathbf{P}_3(\{P\}) = 0,25 \ ; \quad \mathbf{P}_3(\{F\}) = 0,75 \ ; \quad \mathbf{P}_3(\{P;F\}) = 1.$$

La situation est modélisée par le couple $(\Omega_3, \mathbf{P}_3)$.

Définition 9 (espace probabilisé) *Un couple* $(\Omega, \mathbf{P})$ *où* $\mathbf{P}$ *est une probabilité sur* Ω *est appelé un* espace probabilisé*.*

1. À notre niveau seulement. Des difficultés supplémentaires apparaissent lorsque l'on travaille sur un univers infini, et il est nécessaire à partir d'un certain point d'énoncer l'ensemble des événements dont on autorise le calcul de la probabilité dans la modélisation. En effet, sous peine de faire apparaître des paradoxes, il est parfois impossible d'assigner une probabilité à certains événements — ce que l'on appelle des « problèmes de mesurabilité ». Cette question pourrait d'ailleurs être approfondie pour un grand oral ; n'hésitez pas à chercher sur Google « ensemble de Vitali » ou « paradoxe de Banach-Tarski ».

2 Variables aléatoires réelles discrètes et lois de probabilités

Une variable aléatoire représente, intuitivement, l'idée d'un « nombre aléatoire » qui dépend d'un un événement aléatoire.

Formellement, on parle de variable aléatoire réelle discrète. On la définit ainsi :

Définition 10 (variable aléatoire réelle discrète) *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé. Une* variable aléatoire réelle discrète *(v.a.r.d.) sur* $(\Omega, \mathbf{P})$ *est une fonction* $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.

Remarque 11 On parle parfois plus simplement de *variable aléatoire sur* Ω, la probabilité $\mathbf{P}$ étant sous-entendue, de même que le caractère réel discret.

Exemple 12 Reprenons le jeu de carte avec tirage équiprobable. On mise un euro. Si l'on tire un cœur, l'on remporte quatre euros, sinon l'on ne remporte rien.

Appelons G le gain total sur l'opération. G est un nombre aléatoire, qui vaut 3 si l'on a tiré un cœur, -1 sinon.

Formellement, G est une fonction $\Omega_1 \longrightarrow \mathbf{R}$, définie par :

$$G(2\heartsuit) = G(3\heartsuit) = \cdots = G(A\heartsuit) = 3\ ; \quad G(2\clubsuit) = \cdots = G(A\spadesuit) = -1.$$

Définition 13 *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire,* a *et* b *deux réels et* $A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. *On définit les événements suivants :*

- $\{X = a\} = \{\omega \in \Omega\ : X(\omega) = a\}$;
- $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega\ : X(\omega) \in A\}$;
- $\{X \geqslant a\} = \{X \in [a, +\infty[\}$, *et de même* $\{X > a\}$, $\{X < a\}$, $\{X \leqslant a\}$;
- $\{a \leqslant X \leqslant b\} = \{X \leqslant b\} \cap \{X \geqslant a\}$, *etc.*

Exemple 14 Dans l'exemple précédent du jeu de cartes, on a :

$$\mathbf{P}_1(G = 3) = \mathbf{P}\left(\{2\heartsuit, \ldots, A\heartsuit\}\right) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

et $\mathbf{P}_1(G = -1) = \frac{3}{4}$

Définition 15 *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle discrète sur* $(\Omega, \mathbf{P})$. *On appelle* loi de X *la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{P}_X & : \mathscr{P}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbf{P}(X \in A) \end{array}$$

Autrement dit, la loi de X *est la donnée des probabilités que* X *prenne un ensemble de valeurs données.*

Remarque 16 Cette définition, que l'on pourrait qualifier de « naïve », sera raffinée en L2 pour tenir compte des « problèmes de mesurabilité » évoqués plus haut.

Exemple 17 Dans l'exemple précédent, la loi de X est donnée par : $\mathbf{P}_X(-1) = \frac{3}{4}$, $\mathbf{P}_X(\{3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}_X(\{-1, 3\}) = 1$, et $\mathbf{P}_X(A) = 0$ pour toute autre valeur de A.

Exemple 18 Reprenons l'univers Ω_2 correspondant au tirage de deux élèves de la classe. On appelle $\mathbf{P}$ la probabilité correspondant à un tirage équiprobable.

On note X_1 la variable aléatoire valant 0 si le première élève tiré est un homme, 1 si c'est une femme ; X_2 la variable aléatoire valant 0 si le deuxième élève tiré est un homme, 1 si c'est une femme.

Alors pour tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}_{X_1}(A) = \mathbf{P}_{X_2}(\mathbf{R})$. On dit que X_1 et X_2 ont même loi.

Remarque 19 Si X est une v.a.r.d. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$, alors on a pour tout $A \in \mathbf{R}$:

$$\mathbf{P}_X(A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}_X(\{a\})$$

la somme du membre de droite ayant un sens parce que seul un nombre fini de termes sont nuls.

Aussi, la loi de X est entièrement déterminée par la probabilité que X prenne chaque valeur donnée. Autrement dit, *pour décrire la loi de X, il suffit de décrire la probabilité de chaque singleton.*

Ce résultat, vrai à notre niveau, est cependant faux dès lors que l'on parle de variables aléatoires susceptibles de prendre une infinité de valeurs, par exemple pour des variables aléatoires dites *continues*, pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle d'un certain intervalle. De telles variables, qui modélisent des phénomènes réels, ont une probabilité nulle de prendre une valeur réelle précise, mais une probabilité non-nulle de tomber dans un intervalle. Elles seront étudiées à un niveau L1 ou L2.

Exemple 20 Reprenons la variable aléatoire G sur $\{\Omega_1, \mathbf{P}_1\}$ précédemment introduite.

On réalise un deuxième expérience, sans lien avec la première, consistant à tirer une pièce truquée en l'air avec probabilité $\frac{1}{4}$ de tomber sur pile. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $\{\Omega_3, \mathbf{P}_3\}$ déjà introduit. Supposons que l'on gagne trois euros si la pièce tombe sur pile, que l'on perde un euro si elle tombe sur face, et appelons G' le gain.

Alors G et G' ont même loi.

Remarque 21 Deux variables aléatoires n'ont donc pas besoin d'être définies sur un même espace probabilisé pour avoir la même loi de probabilités. Aussi, il est fréquent que des calculs faisant intervenir des variables aléatoires soient faits sans grande considération pour l'espace probabilisé exact sur lequel elles sont définies.

Attention : cette habitude, bien que raisonnable à un niveau élémentaire, peut ensuite donner lieu à des non-sens mathématiques ou à des confusions si l'on n'y prête gare...

Exemple 22 On peut écrire : « soit X une variable aléatoire telle que $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 0,5$ ».

On peut aussi écrire : « soit Y une variable aléatoire de même loi que X ».

Mais ces variables aléatoires, ainsi mal définies, sont-elles sur le même univers ? Si oui, que peut bien valoir $\mathbf{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\})$? Nous n'en savons rien...

Définition 23 (support d'une v.a.r.d.) *Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Le* support *de X est l'ensemble des réels a tels que $\mathbf{P}_X(\{a\}) > 0$.*

Exemple 24 Le support de G est l'ensemble $\{-1, 3\}$.

Remarque 25 Cette définition est totalement fausse dès lors que l'on ne parle plus de variables aléatoires réelles discrètes.

Définition 26 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ et f une fonction réelle définie sur le support de X.*

On appelle $f(X)$ la variable aléatoire définie par $(f(X))(\omega) = f(X(\omega))$.

Exemple 27 Dans l'exemple précédent, la loi de G^2 est donnée par $\mathbf{P}_1(G^2 = 1) = \frac{3}{4}$ et $\mathbf{P}_1(G^2 = 9) = \frac{1}{4}$.

Propriété 28 *Soit X une variable aléatoire et f une fonction réelle. Soit $x \in \mathbf{R}$, et A l'ensemble (éventuellement vide) des antécédents de a par f. On a :*

$$\mathbf{P}(f(X) = x) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X \in A).$$

(démonstration)

Exemple 29 Reprenons l'exemple précédent. Calculer $\mathbf{P}_1(G^2 - 2G - 3 = 0)$ et $\mathbf{P}_1(G^2 - 2G - 3 = -4)$ et $\mathbf{P}_1(G^2 - 2G - 5 = 0)$. Quelle est la loi de $G^2 - 2G - 3$?

3 Indicateurs d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 30 *Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète. L'*espérance *d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs possibles pondérées par leur probabilité, c'est-à-dire :*

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times p_\omega.$$

Propriété 31 *Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une v.a.r.d. et f une fonction définie sur le support de X.*

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \mathbf{P}(X = \omega).$$

(démonstration immédiate)

Théorème 32 (formule de transfert) *Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Son espérance vaut :*

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} x \times \mathbf{P}_X(\{x\}).$$

(démonstration à comprendre)

Définition 33 *Soit X une v.a.r.d. Soit $m = \mathbf{E}[X]$. La* variance *de X est définie comme :*

$$V(X) = \mathbf{E}[(X-m)^2].$$

Et son écart-type est la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 34 (König-Huygens) *Soit X une variable aléatoire. $V(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$.*

(démonstration à comprendre)

Exemple 35 Pour la variable aléatoire G précédemment définie, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[G] &= G(2\heartsuit)p_{2\heartsuit} + \cdots + G(A\spadesuit)p_{A\spadesuit} \\
&= 3 \times \frac{1}{52} + \cdots - 1 \times \frac{1}{52} \\
&= \frac{3 \times 13 + (-1) \times 39}{52} \\
\mathbf{E}[G] &= 0.
\end{aligned}$$

On peut en outre vérifier que :

$$V(G) = 3.$$

Remarque 36 L'espérance et la variance d'une variable aléatoire dépendent de sa loi de probabilités, mais pas de l'univers sur lequel elle est définie.

4 Épreuves multiples et indépendance

L'on est souvent amenés à considérer des situations composites, dans lesquelles plusieurs informations nous sont données. Par exemple, si je réalise deux tirages de cartes à la suite, les événements élémentaires considérés sont des couples ($(2\heartsuit; 3\diamondsuit)$ correspond au tirage d'un deux de cœur suivi par un trois de carreau, etc.).

Ceci amène à considérer des univers qui sont des produits cartésiens d'univers plus simples.

Exemple 37 Dans un premier temps, on considère un jeu de cartes, et l'on fait un tirage en situation d'équiprobabilité. On travaille avec l'univers $\Omega_1 = \{2\heartsuit; \ldots; A\spadesuit\}$.

Dans un second temps, l'on tire une pièce équilibrée à pile ou face. L'on travaille avec l'univers $\Omega_3 = \{P; F\}$.

Si l'on considère l'épreuve considérant à tirer une carte *puis* lancer la pièce, les issues sont alors des couples du type $(2\heartsuit, P)$. L'univers de travail est donc un produit cartésien :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_3.$$

Une telle situation se représente par un arbre pondéré :

L'événement « on tire un valet de cœur » est alors constitué de deux éléments élémentaires :

$$B = \{(V\heartsuit, P); (V\heartsuit, F)\}.$$

De même, l'événement « on tombe sur face » est constitué de 52 éléments élémentaires :

$$C = \{(2\heartsuit, F); \ldots; (A\spadesuit, F)\}.$$

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 38 (probabilité conditionnelle) *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé,* A *et* B *deux événements. On suppose que* $\mathbf{P}(B) > 0$.

La probabilité de A sachant B *est définie comme :*

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Définition 39 (événements indépendants) *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Deux événements* A *et* B *sont dits* indépendants *si* $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$. *Si* B *a une probabilité non-nulle, cela équivaut à dire que :* $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.
2. n *événements* $A_1, \ldots, A_n$ *sont dits* <u>mutuellement</u> indépendants *si pour tout ensemble* $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, *on a :*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j).$$

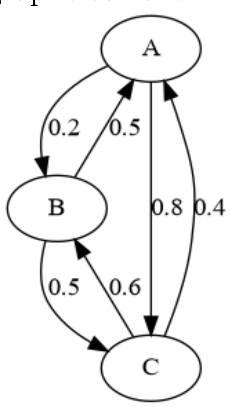
Exemple 40 Reprenons l'exemple précédent, et plaçons-nous en situation d'équiprobabilité. On a :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{2}{104} = \frac{1}{52}\ ; \quad \mathbf{P}(C) = \frac{52}{104} = \frac{1}{2}\ ; \quad \mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{104}.$$

Les événements B et C sont donc indépendants.

De façon générale, lors d'épreuves successives, on peut représenter les issues et calculer les probabilités à partir d'arbres pondérés par les probabilités conditionnelles en jeu.

Exemple 41 (chaîne de Markov simple) On considère un système qui peut prendre trois états A, B ou C. Toutes les minutes, le système change d'état. Sa probabilité d'atteindre un état donné ne dépend que de l'état dans lequel il se trouve, comme l'indique le graphe suivant :



On part de l'état A, et l'on étudie l'expérience aléatoire consistant à laisser le système évoluer pendant trois minutes. Les issues élémentaires sont :

$$\Omega = \{ABAB; ABAC; ABCA; ABCB; ACAB; ACAC; ACBA; ACBC\}.$$

La situation se représente de la façon suivante :

On considère l'événement E : « le système est dans l'état C » à la fin de l'observation. On a :

$$E = \{ABAC\ ; ACAC\ ; ACBC\}.$$

À l'aide de l'arbre, on peut calculer :

$$\mathbf{P}(E) =$$

Remarque 42 Il ne suffit pas, pour que des événements soient mutuellement indépendants, qu'ils soient indépendants deux à deux.

Contre-exemple 43 On lance deux pièces de monnaie équilibrées, ce que l'on modélise par l'univers $\Omega = \{P, F\}^2$ et une probabilité ¶.

Soit A « on obtient pile au premier lancer » ; B « on obtient face au deuxième lancer » ; C « on obtient la même chose aux deux lancers ».

Alors A est indépendant de B, B de C, C de A, mais ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Théorème 44 (formule des probabilités composées) *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé, et* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des événements. On a :*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \times \prod_{i=2}^{n} \mathbf{P}_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)\end{aligned}$$

(démonstration à comprendre)

Définition 45 (v.a.r.d. indépendantes) *Soit* $(\Omega, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Deux variables aléatoires* X *et* Y *définies sur* $(\Omega, \mathbf{P})$ *sont* indépendantes *si et seulement si pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$*, les événements* $\{X = x\}$ *et* $\{Y = y\}$*.*
2. n *variables aléatoires* $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes si pour tous réels* $x_1, \ldots, x_n$*, les événements* $\{X_i = x_i\}$ *sont mutuellement indépendants.*

Exemple 46 Soit $\Omega = \{0,1\}^2$, $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité sur Ω, et X et Y les variables aléatoires définies pour tous α et $\beta \in \{0,1\}$ par $X((\alpha, \beta)) = \alpha$ et $Y((\alpha, \beta)) = \beta$. Soit $Z = X(1-Y) + (1-X)Y$.

Alors X, Y et Z sont indépendantes deux à deux mais ne sont pas mutuellement indépendantes.

5 Simulation d'épreuves avec Python

La bibliothèque standard de Python (c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions qui sont livrées avec toute installation) inclut un module nommé `random`. Celui-ci comporte plusieurs fonctions qui peuvent servir à générer de l'aléa.

Pour rappel, pour pouvoir utiliser une fonction du module `random`, il est nécessaire de l'importer auparavant. On importe par exemple les fonctions `randint` et `choice` de la façon suivante :

```
from random import randint, choice
```

Le module contient de nombreuses fonctions qui permettent des utilisations parfois assez avancées, mais constituent des « boîtes noires » dont le fonctionnement est caché. Nous indiquons ci-après comment utiliser trois des fonctions les plus simples, sans présenter l'ensemble des paramètres qui permettent de raffiner l'utilisation. Pour une utilisation plus avancée, vous devrez lire par vous-même la documentation [2].

— `random()` : renvoie un nombre réel compris entre zéro et un, de façon uniforme. Toutes les fonctions du module peuvent être recodées à partir de celle-ci.

— `randint(a, b)` : renvoie, de façon équiprobable, un nombre entier de l'intervalle $[a, b]$ (les extrémités étant *incluses*).

— `choice(l)` : renvoie, de façon équiprobable, un élément au hasard de la liste ℓ.

Les différents tirages réalisés à la suite sont tous indépendants.

Exemple 47 (rendu en console)

```
>>> from random import random, randint, choice
>>> random()
0.8341802870304158
>>> random()
0.8861367331840815
>>> random() + random()
1.3564813074496813
>>> randint(1,7)
5
```

2. Google est votre ami !

```
>>> randint(1,7)
5
>>> randint(1,7)
2
>>> l = ["maths", "physique", "SVT", "SES", "LLCE", "HG", "humanités", "NSI", "arts
    plastiques", "LLCA", "SI", "EPS", "écologie"]
>>> choice(l)
'physique'
>>> choice(l)
'SVT'
```

Exemple 48 Que fait la fonction suivante ?

```
def choix_spe_ponder():
    alea = random()
    if alea <= 0.5:
        return "maths"
    elif alea <= 0.6:
        return "physique"
    elif alea <= 0.8:
        return "SVT"
    elif alea <= 0.85:
        return "SES"
    else:
        return "LLCE"
```

Exemple 49 Que fait la fonction suivante ?

```
def moyenne_tirage(nb):
    somme = 0
    for i in range(nb):
        somme += random()
    return somme / nb
```

Remarque 50 Attention : il est *faux* de prétendre que la génération de nombres présentée précédemment serait « aléatoire ». Définir l'aléa dans le monde réel n'est pas chose aisée. Cependant ici, les fonctions sont définies pour *donner l'impression de l'aléa*, tout en étant *explicitement* non-aléatoire, afin de permettre la reproductibilité.

En réalité, au lancement de Python, un « générateur » caché de bits est initialisé. À partir d'une même initialisation (appelée « graine »), la même séquence de bits sera toujours générée, de sorte qu'il est possible de reproduire une séquence d'exécution de programme, par exemple pour vérifier qu'il n'y a pas eu de fraude. Par défaut, l'initialisation se fait à partir du nombre de microsecondes écoulées depuis le 1er janvier 1970, ce qui donne une véritable impression de pseudo-aléa.

Mais certaines applications, notamment en sécurité informatique, requièrent de dépasser ce pseudo-aléa. Pour cela, différentes techniques sont utilisées. Le plus simple est de se fonder sur de l'« entropie système », c'est-à-dire des éléments issus de l'état du système, *a priori* inconnus (par exemple : le contenu d'une certaine case mémoire à un instant donné, le dernier mouvement réalisé à la souris, ou la température du processeur). De façon plus avancée, on peut se fonder sur des systèmes quantiques. On peut acheter sur internet un boîtier générant 40 millions de bits par seconde de façon « quantiquement aléatoire » pour environ 1 300 €.

Remarque 51 Le caractère pseudoaléatoire plutôt qu'aléatoire de ces fonctions n'est pas un défaut, mais bien une fonctionnalité voulue.

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible : néant.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Exposer la modélisation retenue pour un problème de probabilités : décrire l'univers et les probabilités des événements élémentaires.
2. Simuler des épreuves simples en Python en utilisant les fonctions `random.randint`, `random.random` et `random.choice`.
3. Décrire la loi d'une variable aléatoire, calculer son espérance et sa variance.
4. Identifier une situation correspondant à une succession d'épreuves indépendantes.
5. Représenter des arbres pondérés de probabilités.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

1. Formule de König-Huygens.
2. Formule des probabilités composées.

Principaux approfondissements.

1. Manipuler avec rigueur le formalisme des probabilités (qu'est-ce, au fond, qu'un événement ? une variable aléatoire ? une probabilité ?).