Chapitre 4 : limites de fonctions

Valentin Melot — Terminale spé maths A

1er décembre 2020

1 Limites infinies de fonctions en l'infini

1.1 Premier cas : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$. On dit que f admet en $+\infty$ une limite égale à $+\infty$ si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. On note alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

De façon plus rigoureuse, on a [1] :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{si et seulement si} \quad \forall A \in \mathbf{R},\ \exists M_A \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \forall x \geqslant M_A, f(x) \geqslant A.$$

Exemple 2 (fonction $x \mapsto x^2$: exemple fondamental)

1. D'après le programme : « On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu »

Contre-exemple 3 (fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$)

1.2 Autres cas de limites infinies en l'infini

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$, et g une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, x_1]$.*

1. *On dit que f admet en $+\infty$ une limite égale à $-\infty$ si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est assez grand. On note :*

2. *On dit que g admet en $-\infty$ une limite égale à $+\infty$ si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ lorsque x est assez petit. On note :*

3. *On dit que g admet en $-\infty$ une limite égale à $-\infty$ si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $]-\infty, A]$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ lorsque x est assez petit. On note :*

De façon plus rigoureuse, on a :

Exemple 5 (quelques limites de référence)

La fonction f définie par...	admet en $-\infty$ la limite...	et en $+\infty$ la limite...
$f : x \mapsto x$ sur $\mathbf{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbf{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbf{R}_+$	(non-définie)	$+\infty$
$f : x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) sur $\mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$f : x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$) sur $\mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$

Lorsqu'on les connaît, on note les limites dans les tableaux de variations :

1.3 Quelques propriétés élémentaires

Propriété 6 (admise) *Soit f une fonction définie sur $[x_0, +\infty[$. Les deux propositions suivantes sont incompatibles :*

(i) f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$

(ii) f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$

La proposition suivante, analogue à celle vue sur les suites, est un cas particulier d'un théorème plus général qui sera vu ultérieurement.

Propriété 7 (comparaisons de limites en $+\infty$) *Soit x_0 un réel, et f et g deux fonctions définies sur $[x_0, +\infty[$.*

On suppose que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$*, alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Les trois résultats suivants et leur preuve sont exigibles :

Lemme 8 *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

Propriété 9 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Théorème 10 (croissance comparée exponentielle-puissance en $+\infty$) *Soit* $n \in \mathbf{N}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

On dit que la fonction exponentielle domine *la fonction* $x \mapsto x^n$ *au voisinage de* $+\infty$.

2 Voisinages, généralisation de la notion de limite

2.1 Limites simples

On note $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 11 (Définition informelle) *Soit $a, \ell \in \bar{\mathbf{R}}$. Soit f une fonction définie « au voisinage de » a, sauf éventuellement en a.*

On dit que f admet ℓ pour limite en a si, pour tout voisinage V de ℓ, on peut trouver un voisinage W de a tel que pour tout $x \in W$ où f est définie, $f(x) \in V$.

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Remarque 12 La notion de « voisinage » est ici à comprendre de façon intuitive, même si elle admet une définition rigoureuse en mathématiques [2].

On doit donc préciser ce qu'est un voisinage :

— Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ (avec $A \in \mathbf{R}$). x appartient à ce voisinage ssi $x \geqslant A$.

— Un voisinage de $-\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty, A]$ (avec $A \in \mathbf{R}$). x appartient à ce voisinage ssi $x \leqslant A$.

— Un voisinage d'un réel ℓ est un intervalle de la forme $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$. x appartient à ce voisinage ssi $\ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$, c'est-à-dire $|x - \ell| < \varepsilon$.

2. On s'abstiendra donc de parler de « voisinages » à l'écrit, en particulier au baccalauréat. Cette notion doit être réservée au brouillon, à la compréhension intuitive des situations, et éventuellement aux explications orales lors du grand oral.

On peut par exemple écrire rigoureusement, avec $a \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad &\text{ssi} \quad \forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \geqslant A \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad &\text{ssi} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \forall x \leqslant A, |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Exemple 13 (limites de référence) Notons $a \in \bar{\mathbf{R}}$, $k \in \mathbf{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \dots \ ; \quad \lim_{x \to a} k = \dots \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \dots \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \dots \ .$$

Exemple 14 (d'autres limites de référence) Soit $a \in \mathbf{R}$. On a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dès que l'une des conditions suivantes est remplie :

(i) f est une fonction polynomiale.

(ii) f est une fonction homographique définie en a.

(iii) f est la fonction racine carrée et $a \geqslant 0$.

(iv) f est l'une des fonctions exponentielle, sinus ou cosinus.

(v) f est la fonction valeur absolue.

Contre-exemple 15 (fonction partie fractionnaire)

2.2 Limites à gauche, limites à droite

Définition 16 (définition informelle) *On peut définir de façon similaire des « voisinages stricts à gauche » et des « voisinages stricts à droite ». On peut en déduire des « limites à gauche » et « limites à droite » :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \ ; \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

Rigoureusement, si a et b sont des réels on peut écrire par exemple :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = b \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall a < x < a + \eta, |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Remarque 17 On parle parfois de limites « en a^+ » et « en a^- ».

Remarque 18 On n'a alors pas besoin de supposer que la fonction f est définie en a.

Exemple 19 (limites de référence)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \ ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}.$$

Propriété 20 *Soit a et ℓ des réels, et f une fonction définie au voisinage de a inclus. Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} = f(a) = \ell$.

Lorsque ces propositions sont vérifiées, on dit que f est continue *en ℓ.*

Remarque 21 Pour $a \in \mathbf{R}$, on pourrait définir de façon similaire les quantités suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x); \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x); \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x).$$

Cela n'est toutefois ni très utile [3], ni très intéressant.

Remarque 22 On peut également définir le fait de tendre vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$ « par valeurs supérieures » ou « par valeurs inférieures ». On note alors de façon abusive que la limite est égale à ℓ^+ ou ℓ^-.

Exemple 23

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+.$$

2.3 Asymptotes

La notion d'*asymptote* traduit géométriquement l'idée de limite.

Propriété 24 (asymptotes en $\pm\infty$) *Soit ℓ un nombre réel.*

1. *Soit f définie sur un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = \ell$ en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.*
2. *Soit f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, x_0]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = \ell$ en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.*

3. Sinon pour donner lieu à des débats passionnés parmi les spécialistes de l'enseignement des mathématiques. . .

Propriété 25 *Soit f une fonction et a un nombre réel. La fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si et seulement si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) f est définie au voisinage de a et $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

(ii) f est définie sur un intervalle de la forme $]a, b]$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$.

(iii) f est définie sur un intervalle de la forme $[b, a[$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Sommes et différences

Propriété 26 (limite d'une somme et d'une différence) *Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$. f et g sont deux fonctions admettant des limites en a.*

SI	$\lim_{x \to a} f(x) = \dots$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
ET	$\lim_{x \to a} g(x) = \dots$	$\ell' \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ALORS	$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \dots$						
ALORS	$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \dots$						

Remarque 27 Les résultats précédents peuvent tous être adaptés pour les cas de limites à gauche et de limites à droite.

Exemple 28

$$\lim_{x \to +\infty} x + 2 = \dots \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} x + e^x = \dots \ ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + \sqrt{x} = \dots \ ; \quad \lim_{x \to 14} x - e^x = \dots$$

Contre-exemple 29 (formes indéterminées)

$$\lim_{x \to +\infty} x - x = \dots \; ; \; \lim_{x \to +\infty} e^x - x = \dots \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+42} - \sqrt{x} = \dots \; ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x) - x \dots$$

Ces contre-exemples seront démontrés ci-après.

3.2 Produits

Propriété 30 (limite d'un produit) *Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$. f et g sont deux fonctions admettant des limites en a.*

SI $\lim_{x \to a} f(x) = \dots$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \neq 0$	∞	*0*
ET $\lim_{x \to a} g(x) = \dots$	$\ell' \in \mathbf{R}$	∞	∞	∞
ALORS $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \dots$				

Remarque 31 Les résultats précédents peuvent tous être adaptés pour les cas de limites à gauche et de limites à droite.

Exemple 32

$$\lim_{x \to +\infty} xe^x = \dots \; ; \quad \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots$$

Contre-exemple 33

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times \frac{1}{x} = \dots \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \dots \; ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+42) \times \frac{1}{x} = \dots \; ; \quad \lim_{x \to \infty} x^2 \times \frac{\sin x}{x} = \dots$$

Remarque 34 Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$, f et g définies au voisinage de a et admettant des limites réelles en a, et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Aux formes indéterminées près, on a :

$$\lim_{x \to \infty} (\alpha.f + \beta.g)(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On dit que l'opération « passage à la limite en a » est   .

3.3 Inverses et quotients

Propriété 35 (limite de l'inverse) *Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$, V un voisinage de a, et f une fonction définie sur V et admettant une limite en a.*

SI $\lim\limits_a f = \dots$	$\ell \in \mathbf{R}^*$	∞	*0*	*0*
ET *pour tout* $x \in V$			$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
ALORS $\lim\limits_a \frac{1}{f} = \dots$				

Remarque 36 Si $a \in \bar{\mathbf{R}}$ et f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) > 0$.

Remarque 37 On en déduit directement les règles de calcul de limites de quotients.

3.4 Mise en pratique : stratégies de calcul de limites

On pourra notamment retenir les quelques techniques suivantes :

— Manipuler les expressions des fonctions pour les écrire comme des sommes ou produits de fonctions simples.

— Réécrire les fonctions au voisinage du point en lequel une limite est recherchée : $\lim\limits_{x \to +\infty} |x - 5| - x$.

— Factoriser par le terme dominant : voir propriétés 38 et 39.

— Multiplier une différence de racines par le conjugué : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 42} - \sqrt{x}$.

— Appliquer le théorème de croissance comparée polynôme-exponentielle : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

Propriété 38 (à redémontrer chaque fois) *Soit f une fonction de la forme :*

$$f : x \longmapsto \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}}{\sum_{j=1}^{m} b_j x^{\beta_j}}$$

où $0 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $0 \leqslant \beta_1 < \dots \beta_m$ sont des réels et $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_m$ sont des réels non-nuls.

Alors, f est définie au voisinage de $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha_n - \beta_m}.$$

Si de plus, tous les α_i et β_j sont des entiers positifs, alors f est définie au voisinage de $-\infty$ et :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to -\infty} x^{\alpha_n - \beta_m}.$$

Propriété 39 (à redémontrer à chaque fois) *Soit f une fonction de la forme :*

$$f : x \longmapsto \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x^{\beta_j}}$$

où $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, $\beta_1 < \ldots \beta_m$ sont des <u>*entiers positifs*</u> *et $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ sont des réels non-nuls.*

Alors f admet des limites à gauche et à droite en 0 vérifiant :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha_0-\beta_0} \;; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^{\alpha_0-\beta_0}.$$

Remarque 40 Pour la fonction f de la propriété 38, on dit que x^{α_n} et x^{β_m} sont les termes dominants en $\pm\infty$ du numérateur et du dénominateur.

Pour la fonction f de la propriété 39, on dit que x^{α_0} et x^{β_0} sont les termes dominants en 0^+ et 0^-.

3.5 Composition de limites

Théorème 41 (théorème de composition) *Soit $a, b, c \in \bar{\mathbf{R}}$ et f et g deux fonctions.*

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Exemple 42

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = \ldots \;; \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{(x-2)^3}{4(x-2)^2+3(x-2)} = \ldots \;; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(\sqrt{|x|}-7)^3} = \ldots$$

Corollaire 43 *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors les fonctions $x \mapsto f(x+1)$, $x \mapsto f(2x)$, $x \mapsto f(x^2)$, $x \mapsto f(e^x)$ admettent une limite ℓ en $+\infty$.*

Exemple 44 ($x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ n'a pas de limite en $+\infty$)

Remarque 45 Ce théorème peut être adapté aux cas des limites à gauche et à droite, et aux cas où la limite est atteinte par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures. Par exemple, si $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = b^+$ et $\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} g(x) = c^-$, alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = c^-$.

4 Limites et inégalités

4.1 Limite monotone (à la limite du programme)

Théorème 46 (théorème de la limite monotone pour les fonctions en $\pm\infty$)

1. *Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, et f une fonction définie sur $[x_0, +\infty[$. SI les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :*
   (i) f est croissante sur $[x_0, +\infty[$
   (ii) ET il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \leqslant M$
   ALORS f admet une limite finie en $+\infty$.
2. *Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, et f une fonction définie sur $]-\infty, x_0]$. SI les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :*
   (i) f est décroissante sur $]-\infty, x_0]$
   (ii) ET il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \leqslant x_0$, $f(x) \leqslant M$
   ALORS f admet une limite finie en $-\infty$.

Remarque 47 Le théorème assure seulement que la limite existe, mais il ne nous donne pas sa valeur !

Exemple 48 (l'aire sous une courbe infinie) On considère la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbf{R}_+$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, et A la fonction qui à $\xi \in \mathbf{R}_+$ associe l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses $x = 0$ et $x = \xi$.

La fonction A est croissante. On peut démontrer qu'elle est majorée par 2 (par exemple). Donc elle admet une limite, que l'on peut interpréter intuitivement comme l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, et qui s'étend « à l'infini » sur la droite.

En réalité, on peut prouver [4] que $\lim_{+\infty} A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Avec des outils qui sont au programme de maths spé...

Remarque 49 Ce théorème peut être adapté au cas où la fonction est monotone et où il existe un minorant. Il peut également être adapté au cas des limites à gauche et limites à droite en un nombre réel.

Remarque 50 Comme pour les suites, ce théorème peut enfin être adapté au cas où la fonction est monotone et non-minorée (ou non-majorée, selon le cas), ce qui assure l'existence d'une limite infinie.

4.2 Passage à la limite d'une inégalité

Théorème 51 (passage à la limite des inégalités) *Soit* $a \in \bar{\mathbf{R}}$, f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* a *sauf éventuellement en* a. *Si :*

(i) Il existe un voisinage V *de* a *tel que pour tout* $x \in A$ *où* $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont définies,* $f(x) \geqslant g(x)$ *;*

(ii) f *et* g *admettent des limites en* a *;*

alors $\lim_a f \geqslant \lim_a g$.

Exemple 52 (vers la dérivée du sinus) Par un argument géométrique, on peut démontrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{2} \leqslant \frac{\theta}{2}$$

on en déduit que :

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \leqslant \frac{1}{\cos\theta}$$

Donc SI sin est dérivable en zéro, ALORS nécessairement

Remarque 53 Ce résultat assure que la limite donnée par le théorème de la limite monotone vérifie le même encadrement que la fonction étudiée.

Remarque 54 Même si l'on suppose l'inégalité stricte dans la première hypothèse, l'inégalité reste large dans la conclusion.

Contre-exemple 55 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g = -f$. On pour tout $x > 0$, $g(x) < f(x)$, mais il est faux d'affirmer que $\lim_{+\infty} g < \lim_{+\infty} f$.

Remarque 56 Ce théorème ne suffit pas, dans le cas général, à affirmer l'existence de la limite de l'une des fonctions !

Contre-exemple 57 $a = +\infty$, $g = \sin$, f la fonction constante égale à 1.

4.3 Existence de limite par comparaison

Le théorème suivant généralise la propriété 7 aux cas de limites infinies au voisinage de n'importe quel point.

Théorème 58 (théorème de divergence par comparaison) *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a (resp. au voisinage gauche de a, resp. au voisinage droit de a) où $a \in \bar{\mathbf{R}}$.*

On suppose que pour tout x au voisinage de a (resp. au voisinage gauche de a, resp. au voisinage droit de a), on a $f(x) \geqslant g(x)$.

(i) SI DE PLUS $\lim g = +\infty$, *ALORS* $\lim f$ *existe et est égale à* $+\infty$.

(ii) SI DE PLUS $\lim f = -\infty$, *ALORS* $\lim g$ *existe et est égale à* $-\infty$.

Les limites considérées étant les limites (resp. limites à gauche, resp. limites à droite) en a.

Exemple 59 (limites de $\frac{42+\sin(x)}{x}$ au voisinage de 0)

Théorème 60 (théorème de convergence par encadrement) *Soit f, g_1 et g_2 trois fonctions définies au voisinage de a (resp. au voisinage gauche de a, resp. au voisinage droit de a) où $a \in \bar{\mathbf{R}}$.*

Si les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

(i) Pour tout x au voisinage de a (resp. au voisinage gauche de a, resp. au voisinage droit de a), on a $g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$.

(ii) g_1 et g_2 ont une même limite (resp. limite à gauche, resp. limite à droite) réelle ℓ en a.

alors $\lim\limits_{a} f$ (resp. $\lim\limits_{a^-} f$, resp. $\lim\limits_{a^+} f$) existe et est égale à ℓ.

Exemple 61 (sinus cardinal, ULTRA-CLASSIQUE)

5 Résultats divers

Propriété 62 (unicité de la limite) *Soit $a, \ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$ et f une fonction définie au voisinage de a.*

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Nota : cette propriété peut être adaptée aux cas des limites à gauche et des limites à droite.

Définition 63 (rappel) *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. La fonction f est dite* dérivable en a *si et seulement si la fonction :*

$$h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite en 0.

En ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, *et notée $f'(a)$.*

On peut donc tirer parti de nos connaissances sur la dérivation pour calculer certaines limites.

Exemple 64

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \dots$$

Théorème 65 (caractérisation séquentielle de la limite) *Soit* $a, \ell \in \bar{\mathbf{R}}$, f *une fonction définie au voisinage de* a *sauf éventuellement en* a. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_a f$ *existe et est égale à* ℓ *;*

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de nombres réels, si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Seule l'implication $(i) \implies (ii)$ est au programme. L'implication réciproque est hors-programme.

Exemple 66

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad ; \qquad \lim_{n\to+\infty} ne^{\frac{1}{n}} - n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 67 (cos n'a pas de limite en $+\infty$)

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible :

1. $e^x \geqslant 1 + x$, limite de exp en $+\infty$.
2. Théorème de croissance comparée exponentielle-polynôme en $+\infty$.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Conjecturer une limite par lecture graphique ou à partir d'un tableau de valeurs.
2. Énoncer en termes de voisinage la définition d'une limite.
3. Connaître par cœur et utiliser en contexte les limites des fonctions de référence (polynômes, exp, inverse, racine, sin et cos).
4. Maîtriser sans hésitation les règles d'opérations sur les limites (somme, différence, produit, quotient, composée par une fonction ou par une suite). Reconnaître les formes indéterminées.
5. Résoudre les formes indéterminées simples en factorisant par le terme prépondérant.
6. Faire le lien entre limite et existence d'asymptotes verticales ou horizontales.
7. Utiliser les théorèmes d'existence de limite par majoration, par minoration ou par encadrement.
8. Passer à la limite dans une inégalité.
9. Utiliser le théorème de la limite monotone.
10. Justifier, dans des cas simples, qu'une fonction n'admet pas de limite.
11. Faire le lien entre limite et dérivation.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

1. Limite de $x \mapsto x^2$ en $+\infty$.
2. Unicité de la limite.
3. Majoration de la limite de $\frac{\sin\theta}{\theta}$ en 0^+.

Principaux approfondissements.

1. Aisance avec le formalisme des voisinages, manipulation d'expressions de la forme à $\forall \dots \exists \dots$.
2. Autonomie sur les transformations de fonctions à réaliser pour calculer des limites plus complexes (par exemple avec des racines carrées).
3. Sens réciproque de la caractérisation séquentielle de la limite (et sa démonstration).