Chapitre 13 : équations de droites et de plans dans l'espace

Valentin Melot — Terminale spé maths A

23 mai 2021

Dans l'ensemble du chapitre, on se place dans l'espace $\mathscr{E}$, que l'on munit d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Ce repère et la base associée étant fixés, on peut sans ambiguïté identifier chaque point M à ses coordonnées (x_M, y_M, z_M), et chaque vecteur $\vec{u}$ à ses coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

1 Introduction : qu'est-ce qu'une équation d'ensemble ?

Définition 1 *On appelle* $\mathbf{R}^3$ *l'ensemble des triplets* (x, y, z) *avec* $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ *et* $z \in \mathbf{R}$. $\mathbf{R}^3$ *peut donc être identifié à l'espace tout entier.*

Définition 2 *Soit* E *un ensemble de points de l'espace. On appelle* équation *de* E *une relation algébrique reliant* x, y *et* z *vérifiée par les coordonnées d'un point si et seulement si ce point fait partie de cet ensemble.*

Exemple 3 L'égalité $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point (pourquoi ?). C'est donc une équation de l'ensemble vide. On peut donc écrire que l'ensemble vide est l'ensemble :

$$\varnothing = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Exemple 4 Le triplet d'égalités :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

est vérifié par un unique point, de coordonnées $(1, 2, 3)$. Il s'agit donc de l'équation d'un ensemble réduit à un seul point, à savoir le singleton $\{(1, 2, 3)\}$.

Exemple 5 L'égalité $x = 1$ est vérifiée par tous les triplets (x, y, z) pour lesquels $x = 1$, quelle que soit la valeur de y et celle de z. C'est donc une équation de l'ensemble :

$$\{(1, y, z) \ : y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}.$$

On remarque qu'une coordonnée est fixée et que deux sont libres. Un tel ensemble forme un plan, comme nous le démontrerons ultérieurement.

Exemple 6 Considérons l'ensemble E d'équation $xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 = 0$. Autrement dit,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \ : xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 = 0\}.$$

Le membre de gauche peut être factorisé de façon à être mis sous la forme $(x-1)(y-1)(z-1)$. D'après le « théorème de l'équation produit-nul »[1], le membre de gauche est donc nul si et seulement si l'une des trois conditions suivantes au moins est vérifiée :

(i) $x = 1$,

(ii) $y = 1$,

(iii) $z = 1$.

E est donc la réunion des ensembles $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : x = 1\}$; $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : y = 1\}$ et $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : z = 1\}$. Comme dans l'exemple précédent, chacun de ces ensembles forme un plan. E est donc la réunion de ces trois plans.

Remarque 7 Il n'y a pas unicité de l'équation d'un ensemble. En réalité, deux équations équivalentes ont le même ensemble de solutions, dont elles sont une équation.

Par exemple, $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$ et $xyz - xy - yz - xz + x + y + z = 1$ sont deux équations du même ensemble. $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = -2$ sont également deux équations du même ensemble, à savoir l'ensemble vide.

L'objectif de ce chapitre est de présenter sommairement certains types d'équations de certains types d'ensembles.

Définition 8 *On appelle* variable muette *une variable qui intervient dans l'écriture d'une équation d'ensemble, mais n'est pas utile en dehors de celle-ci. Une telle variable doit être introduite par un quantificateur ($\forall$ ou $\exists$). Sa notation peut changer selon les besoins.*

Exemple 9 L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, qui définit la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ (pourquoi ?) peut être modifiée de façon à la transformer en :

$$\exists t \in \mathbf{R}, t^2 = 2, x^2 + y^2 + z^2 = t.$$

Cette transformation n'est pas très utile en pratique, mais l'équation ainsi obtenue définit bien toujours le même ensemble.

Définition 10 *Une équation d'ensemble faisant apparaître des variables muettes introduites par un quantificateur existentiel ($\exists$) est appelé une* équation paramétrique*. Les variables sont appelées les* paramètres *de l'équation.*

Exemple 11 Soit R un réel strictement positif. L'équation :

$$\exists \theta \in [0, 2\pi[\ : \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$$

définit un cercle de centre $(0, 0, 2)$, de rayon R, situé dans le plan $z = 2$.

Le réel θ est ici le *paramètre* de cette *équation paramétrique*. Il varie ici dans l'ensemble $[0, 2\pi[$.

1. En vertu duquel un produit de réels est nul si et seulement si l'un de ces réels est nul.

Remarque 12 L'ensemble décrit par une équation paramétrique représente la « trace » laissée par les points vérifiant l'équation pour une certaine valeur du paramètre, lorsque celui-ci se déplace.

Notation 13 *Dans une équation paramétrique, on peut simplement écrire le paramètre* après *l'équation qu'il définit, en indiquant l'ensemble dans lequel il varie. Le quantificateur existentiel est sous-entendu. Par exemple, l'équation précédente peut se réécrire :*

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[. \\ z = 2 \end{cases}$$

2 Équations paramétriques de droites

Propriété 14 (rappel) *Une droite (d) est caractérisée par la donnée d'un point A qui lui appartient et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.*

Propriété 15 *Soit (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Soit B un point de l'espace. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $B \in (d)$;

(ii) $\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires ;*

(iii) Il existe $t \in \mathbf{R}$ *tel que* $\overrightarrow{AB} = t.\vec{u}$.

Propriété 16 *La droite passant par le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigée par le vecteur non-nul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix}$ a pour équation paramétrique :*

$$(d) \ : \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

Remarque 17 Les coordonnées d'un point vérifient l'équation précédente si et seulement si ce point appartient à (d). Autrement dit, si un point appartient à la droite, alors on pourra trouver un réel t tel que le système d'équations sera vérifié. Si l'on peut démontrer qu'un tel réel n'existe pas, alors le point n'appartient pas à la droite.

Exercice 18 Déterminer deux équations paramétriques de la droite passant par $A(1, 3, 4)$ et $B(2, 4, 6)$.

Exercice 19 On considère la droite (d) d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Déterminer si les point suivants appartiennent à (d) : $A(3, 4, -1)$, $B(2, 4.5, -1.5)$, $C(4, 4, -1)$, $D_\alpha(2 + \alpha, 4.5 - \frac{\alpha}{2}, -1 + \frac{\alpha}{2})$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

Exercice 20 Parmi les trois droites suivantes, certaines sont-elles sécantes ? Si oui, indiquer les coordonnées de leur point d'intersection :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t, \quad t \in \mathbf{R} ; \\ z = -t \end{cases} \quad (d_2) \ : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 7 - t, \quad t \in \mathbf{R} ; \\ z = t \end{cases} \quad (d_3) \ : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 + 2t, \quad t \in \mathbf{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

Exercice 21 Que peut-on dire de l'ensemble d'équation :

$$\begin{cases} x = 3 + 2z \\ y = 4 - z \end{cases} \quad ?$$

Exercice 22 Décrire l'ensemble d'équation

$$(x - 3t + 1)^2 + (y - 4t + 1)^2 + (z - t)^2 = 0.$$

Exercice 23 En effectuant uniquement des transformations algébriques, démontrer que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t, \qquad t \in \mathbf{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 6 + 5t, \qquad t \in \mathbf{R}. \\ z = -5 - 5t \end{cases}$$

Exercice 24 On se donne un point A, et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-colinéaires. À quelle condition $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils coplanaires ?

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de A, (α, β, γ) celles de $\vec{u}$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ celles de $\vec{v}$. Quel ensemble l'équation paramétrique suivante définit-elle ?

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_0 + \beta t + \beta' t', \quad (t, t') \in \mathbf{R}^2. \\ z = z_0 + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}$$

3 Équations cartésiennes de plans

Propriété 25 (rappel) *Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non-nul. Il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ passant par A.*

Propriété 26 *Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et normal à un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$. Soit B un point de l'espace. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $B \in \mathscr{P}$ *;*

(ii) $\overrightarrow{AB}$ *est orthogonal à* $\vec{n}$ *;*

(iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.

Définition 27 *On appelle* équation cartésienne *une équation de la forme :*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec a, b, c, d des réels, et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Propriété 28 *Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et normal au vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ admet l'équation cartésienne suivante :*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = 0.$$

Exercice 29 Que peut-on dire des deux ensembles définis par les équations suivantes ?

$$\mathscr{P} : x - 3y + 5z - 10 = 0 \ ; \qquad (d) \ : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t, \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Exercice 30 On considère les plans suivants :

$$\mathscr{P} : x + y - z - 4 = 0 \ ; \qquad \mathscr{P}' : -x + y + 2z + 1 = 0.$$

Déterminer une équation de l'ensemble $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$,

1. En utilisant une méthode purement géométrique ;
2. En effectuant seulement des transformations algébriques.

Exercice 31 Trouver une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(-1, 0, 1)$. On pourra raisonner par analyse-synthèse sur les valeurs de a, b, c et d.

Exercice 32 On considère les droites suivantes :

$$(d) \ : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t, \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \ ; \qquad (d') \ : \begin{cases} x = -t \\ y = 4, \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Justifier qu'il existe un unique plan contenant (d) et (d'), et en donner une équation cartésienne.

4 Projections

Propriété 33 *Soit $\mathscr{P}$ un plan admettant une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A).*

Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ vérifie l'équation :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

On peut donc trouver les coordonnées du projeté, qui est l'unique (pourquoi ?) point vérifiant simultanément l'équation de $\mathscr{P}$ et l'équation de droite donnée par la proposition.

Propriété 34 *Soit (d) une droite admettant une équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t, \quad t \in \mathbf{R} \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$.

Soit A de coordonnées (x_A, y_A, z_A). Le projeté orthogonal de A sur (d) vérifie l'équation :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_A + \beta y_A + \gamma z_A) = 0.$$

Les acquis de ce chapitre

Démonstrations exigibles :

1. Établissement de l'équation cartésienne d'un plan.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Comprendre ce qu'est l'équation d'un ensemble de l'espace.
2. Manipuler des équations cartésiennes de plans.
3. Manipuler des équations paramétriques de droites.
4. Résoudre des problèmes géométriques faisant intervenir des équations de droites et de plans.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

1. Toutes, ainsi que les différents exercices d'application du cours.

Principaux approfondissements.

1. Équations paramétriques de plans.