Chapitre 12 : intégrales

Valentin Melot — Terminale spé maths A

5 mai 2021

On présente dans ce chapitre une première approche intuitive des intégrales.

Définition 1 *Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'*unité d'aire *(u.a.) est l'aire du rectangle construit sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, c'est-à-dire la quantité $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.*

On fixe par la suite un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Intégrale d'une fonction continue à valeurs positives sur un segment

1.1 Définitions et exemples

Définition 2 *Soit f une fonction continue à valeurs positives sur un intervalle fermé $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. On appelle* intégrale de f sur $[a, b]$ *l'aire du domaine du plan délimité par :*

- *la droite d'équation $x = a$;*
- *la courbe représentative de f ;*
- *la droite d'équation $x = b$;*
- *l'axe des ordonnées.*

Cette intégrale est notée :

$$\int_{[a,b]} f.$$

Remarque 3 De façon plus formelle, l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine suivant du plan $\mathscr{P}$:

$$\{M \in \mathscr{P} : a \leqslant x_M \leqslant b \,; 0 \leqslant y_M \leqslant f(x_M)\}.$$

Remarque 4 Par définition, l'intégrale d'une fonction positive sur un segment est un réel positif.

Notation 5 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. On note :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f\ ;$$

$$\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f.$$

Dans les notations précédentes, la variable t est muette, c'est-à-dire qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre valeur (par exemple u, x, $\theta\dots$).

Remarque 6 Attention, si $a < b$ et f est une fonction continue positive définie sur $[a,b]$, on a : $\int_{[b,a]} f = 0$ (puisque $[b,a]$ est l'ensemble vide) mais $\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ par définition.

Exemple 7 On fixe $a < b$.

1. Soit $C > 0$. La courbe représentative de la fonction $t \longmapsto C$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées. La surface considérée pour définir l'intégrale $\int_a^b C\ \mathrm{d}t$ est donc un rectangle de base $(b-a)$ et de hauteur C. On a donc :
$$\int_a^b C\ \mathrm{d}t = (b-a)C.$$
2. On suppose que $a \geqslant 0$. La surface considérée pour définir l'intégrale $\int_a^b t\ \mathrm{d}t$ est un trapèze de hauteur $(b-a)$ et de bases a et b. Sa valeur est donc :
$$\int_a^b t\ \mathrm{d}t = (b-a)\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$
3. La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$ est un demi-cercle de centre O et de rayon 1 (pourquoi ?). Son intégrale sur $[-1,1]$ est donc l'aire du demi-disque associé, soit :
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$
4. Quelle que soit la fonction f positive et définie en a considérée, on a :
$$\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Remarque 8 Cette définition permet de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle lorsque l'on dispose d'une représentation géométrique, en donnant une minoration et une majoration du nombre d'unités d'aire contenues dans la surface considérée.

Exemple 9 Sur l'image suivante, la courbe verte représente la fonction $x \longmapsto x^4e^{-x}$. Sachant que chaque carreau a une surface de 0,25 u.a. on peut écrire :

$$\frac{71}{4} \leqslant \int_2^8 x^5e^{-x}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{95}{4}.$$

Propriété 10 *Soient f et g deux fonctions continues positives définies sur un intervalle I, telles que $f \leqslant g$ sur I. Alors le domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, la coubre $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ a pour aire :*

$$\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

1.2 Du discret au continu

Définition 11 *Soit f une fonction positive sur un intervalle $[a, b]$. On définit les sommes de Riemann à gauche et à droite comme étant respectivement :*

$$R_n^g(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad ; \qquad R_n^d(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On peut définir des sommes de Riemann d'autres types, par exemple en choisissant la valeur au milieu des intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ considérés.

On constate que ces sommes de Riemann approximent l'intégrale de la fonction f sur le domaine considéré. Cette approximation converge lorsque le pas tend vers 0 pour les fonctions continues, comme l'indique le théorème suivant. Ce résultat, essentiel, est en fait parfois considéré comme une définition de l'intégrale. Les outils au programme de terminale ne permettent cependant pas de le démontrer rigoureusement.

Théorème 12 (admis) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On a :*

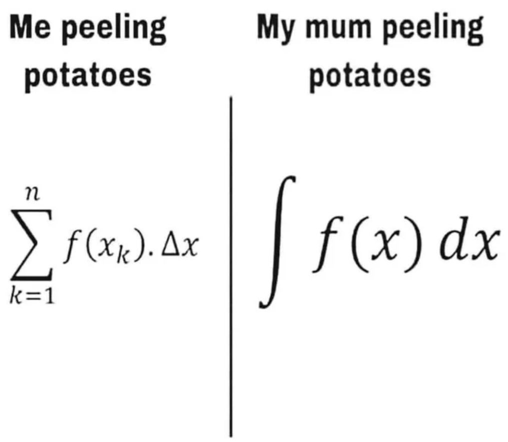
$$\lim_{n\to+\infty} R_n^g(f) = \lim_{n\to+\infty} R_n^d(f) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 13 Lorsque f est une fonction monotone, les sommes de Riemann à gauche et à droite forment des suites elle-mêmes monotones, et encadrent l'intégrale. Si l'on est en mesure de calculer les valeurs de ces sommes, on peut en déduire de façon rigoureuse une valeur de l'intégrale.

Exemple 14 Les encadrements de surface par des assemblages de rectangle réalisés dans l'activité introductive sur les sommes de Riemann permettent de montrer en toute rigueur que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$:

— $\int_0^x t^2\ \mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$;
— $\int_0^x e^t\ \mathrm{d}t = e^x - 1$;
— $\int_0^x te^t\ \mathrm{d}t = (x-1)e^x$.

Remarque 15 L'approximation par des intégrales de Riemann justifie que l'intégrale puisse être vue comme une « somme continue ».



Exemple 16 Un objet possède une énergie thermique U (en joules) variable au cours du temps. Il reçoit à chaque instant une puissance thermique P (en watts, c'est-à-dire en joules par seconde). On se place sur l'intervalle de temps $[0,T]$. Alors :

1. Si P est constant, alors l'énergie totale reçue ΔU est égale à $P \times T$. On remarque que :
$$\Delta U = PT = \int_0^T P\ \mathrm{d}t.$$
2. Si l'on suppose que P dépend du temps, alors on peut étudier les variations sur un intervalle élémentaire de temps de la forme $[t, t+\ \mathrm{d}t]$ (où $\mathrm{d}t$ représente un très petit temps). En ce cas, la puissance reçue pendant l'intervalle $[t, t+\ \mathrm{d}t]$ peut

être supposée quasiment constante, et donc égale à $P(t)$. L'énergie reçue sur cet intervalle est donc $P(t)\ \mathrm{d}t$.
En supposant que l'intervalle $[0, T]$ se décompose en n intervalles élémentaires $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$ ayant chacun une longueur $\mathrm{d}t$, la puissance totale reçue est :

$$\Delta U = \sum_{k=1}^{n} P(t_k)\ \mathrm{d}t$$

Lorsque $\mathrm{d}t$ est suffisamment petit, cette somme approxime une intégrale :

$$\Delta U = \int_0^T P(t)\ \mathrm{d}t.$$

L'intégration correspond donc à un passage *du discret au continu.*

Définition 17 *Si f est une fonction continue à valeurs positives sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors on appelle* valeur moyenne de f sur $[a, b]$ *la quantité :*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 18 Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $[0, 2]$.

1.3 Propriétés élémentaires

Propriété 19 (relation de Chasles) *Soient a, b et c trois réels et f une fonction continue à valeurs positives. On suppose que f est définie sur un intervalle contenant a, b et c. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t.$$

(démonstration)

Remarque 20 Le théorème ne fait aucune hypothèse sur l'ordre de a, b et c.

Exemple 21 Soit f définie sur $[0, 2]$ telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0, 1]$ et $f(t) = 1$ pour $t \in [1, 2]$. Alors d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Propriété 22 (intégration des inégalités) *Soient f et g deux fonctions continues définies sur un même intervalle $[a, b]$. On suppose que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

(démonstration)

Propriété 23 (compatibilité avec la somme) *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs positives. Alors :*

$$\int_a^b f(t) + g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$$

(démonstration informelle)

Propriété 24 (compatibilité avec le produit par un réel positif) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs positives, et soit $\lambda \in \mathbf{R}_+$. On a :*

$$\int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 25 Calculer l'intégrale $\int_0^1 t^2 + 3t + 2\ \mathrm{d}t$.

Exercice 26 Proposer une démonstration rigoureuse des résultats de compatibilité de l'intégrale avec la somme et le produit par un réel positif utilisant le théorème 12 admis.

2 Liens avec le calcul de primitives

Théorème 27 (théorème fondamental du calcul intégral) *Soit f une fonction continue à valeurs positives sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Alors la fonction suivante est une primitive de f sur I :*

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t. \end{array}$$

(Démonstration partielle dans le cas où f est croissante exigible. La démonstration est hors-programme dans le cas général.)

Corollaire 28 (essentiel) *Soit f une fonction continue et à valeurs positives sur un intervalle $[a, b]$. Si F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Notation 29 *Si F est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, on note :*

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple 30

$$\int_0^\pi \sin(t)\ \mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Corollaire 31 *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, et si $a \in I$, alors l'unique primitive de f qui s'annule en a est :*

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 32 Attention, toutes les primitives de f n'ont pas pour autant cette forme. Par exemple, pour $I = \mathbf{R}$ et $f = \cos$, les primitives ainsi obtenues sont de la forme $x \longmapsto \sin(x) - \sin(a)$, et la primitive $x \longmapsto \sin(x) - 42$ ne peut pas être obtenue de cette façon.

Corollaire 33 *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.*

Remarque 34 Le corollaire 28 est parfois utilisé comme une définition de l'intégrale d'une fonction sur un segment. On parle alors d'*intégrale de Newton*. Cependant, rien ne garantit alors l'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle.

Remarque 35 À partir du théorème fondamental du calcul intégral, on peut facilement démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, et λ et μ deux réels positifs, alors :

$$\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Remarque 36 Les primitives d'une fonction sont parfois appelées *intégrales indéfinies* (dans le sens où les bornes de l'intégrale ne sont pas fixées). Le symbole $\int f$ est parfois utilisé pour représenter une primitive quelconque de f (à éviter en terminale).

Exercice 37 Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soit $b \in I$. Donner la dérivée de la fonction $x \longmapsto \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 38 (série harmonique) On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\int_1^n \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant H_n.$$
3. En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3 Intégrale d'une fonction continue signée sur un segment

Définition 39 (parties positive et négative) *Soit f une fonction signée définie sur un ensemble E. On appelle* partie positive *et* partie négative *de f les fonctions f_+ et f_- définies pour $x \in E$ par*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

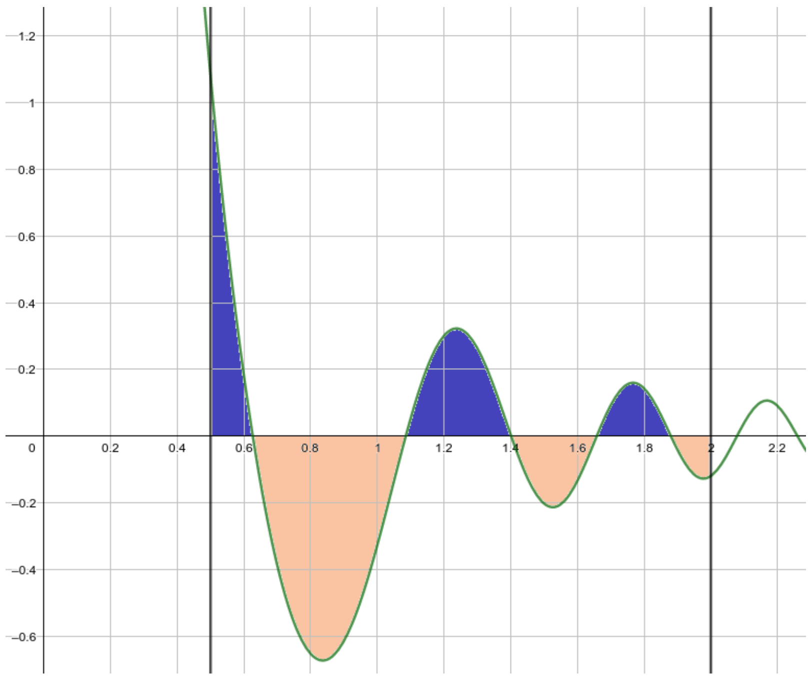
f_+ et f_- sont donc deux fonctions positives telles que $f = f_+ - f_-$. On montre facilement que si f est continue sur l'intervalle I, alors f_+ et f_- le sont également.

Définition 40 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On définit l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ comme étant :*

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f_+(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f_-(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 41 Autrement dit, l'intégrale d'une fonction s'obtient en calculant d'une part l'aire des domaines définis par sa courbe au-dessus de l'axe des abscisses, d'autre part celle des domaines situés en-dessous, et en les soustrayant.

Sur le graphe suivant, on a représenté graphiquement l'intégrale de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^{-2}\cos(4x^2)$ sur $[0,5\ ;2]$. Les zones du plan en bleu sont comptées positivement, les zones en saumon négativement.



La proposition suivante est essentielle pour démontrer des résultats théoriques :

Propriété 42 (inégalité triangulaire, limite programme) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On a :*

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

(démonstration)

Remarque 43 Le théorème fondamental du calcul intégral peut se démontrer au niveau terminale en toute généralité, grâce à cette inégalité.

Les notations utilisées pour les intégrales de fonctions positives restent les mêmes. On définit également la valeur moyenne et les sommes de Riemann de la même façon que pour les fonctions positives.

Les divers résultats vus précédemment pour les fonctions signées restent alors valables pour les fonctions signées, bien que leur démonstration soit parfois rendue plus difficile :

— **L'expression de l'aire d'un domaine encadré par deux courbes** (démonstration).

— **La convergence des suites de Riemann** (admise, peut servir de définition de l'intégrale).

— **La linéarité de l'intégrale** (s'en déduit).

— **La relation de Chasles** (démonstration).

— **L'intégration des inégalités** (démonstration). En particulier, **l'intégrale d'une fonction négative est négative** et **l'intégrale d'une fonction positive est positive**.

— **Le théorème fondamental du calcul intégral** et ses différents corollaires : expression de l'intégrale comme le crochet d'une primitive, expression de l'unique primitive s'annulant en un point par une intégrale, existence de primitives (essentiel, démonstration accessible en terminale mais non-exigible).

Exercice 44 Démontrer que la valeur moyenne de la fonction cos sur l'intervalle $[a, x]$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, puis que la valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto \cos(ax)$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice 45 On appelle f la fonction $x \longmapsto |\cos x|$. Calculer la valeur moyenne de f sur un intervalle de la forme $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on appelle k_x l'unique entier naturel tel que $x \in [k_x\pi, (k_x+1)\pi[$. Donner un encadrement de $\int_0^x f$ en fonction de k_x, puis un encadrement de k_x en fonction de x. En déduire

4 Intégration par parties et suites d'intégrales

Théorème 46 (intégration par parties) *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. On a :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t.$$

(démonstration exigible)

Remarque 47 À chaque application du théorème, on veillera à bien faire apparaître l'énoncé des fonctions u, v, u' et v', et à indiquer explicitement que u et v sont dérivables et que leur dérivée est continue.

Exercice 48 En effectuant des intégrations par parties, calculer les valeurs des deux intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 xe^{-x}\ \mathrm{d}x\ ; \qquad B = \int_0^1 x^2e^{-x}\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 49 En dérivant le facteur ln, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 50 On pose $I_n = \int_{-1}^1 x^n e^{-x}\ \mathrm{d}x$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, et en déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 51 On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \int_1^e \ln^n(x)\ \mathrm{d}x$. En dérivant $\ln^{n+1}(x)$, démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.

Exercice 52 (intégrales de Wallis, classique) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant W_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, puis que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers une limite ℓ.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$. On pourra commencer par écrire $\cos^{n+2} = \cos \times \cos^{n+1}$, et effectuer une intégration par partie.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
6. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a,
$$W_{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\ ; \qquad W_{2k+1} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}.$$
7. Démontrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.
8. À l'aide des questions 2 et 5, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.
9. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

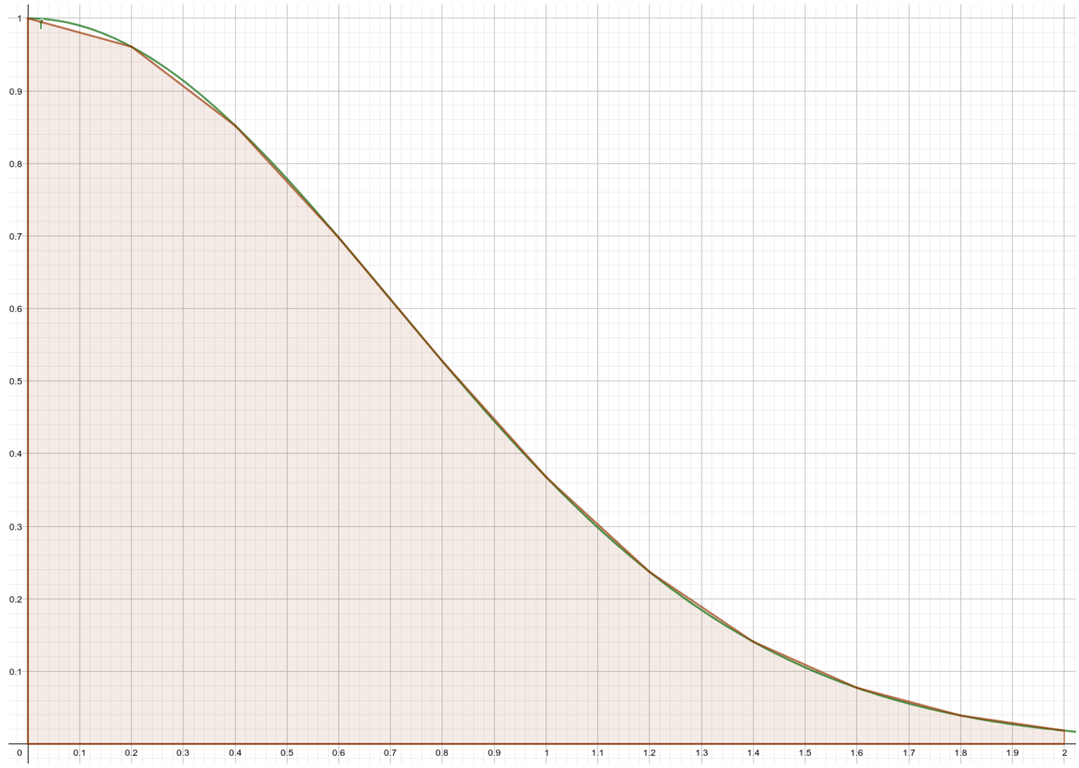
5 Calcul numérique

5.1 Méthodes d'interpolation

Le plus simple pour calculer l'intégrale d'une fonction consiste à approcher la fonction choisie par des fonctions dont l'intégrale peut être calculée de façon explicite. Citons notamment :

— Les diverses *méthodes des rectangles*, qui consistent en un calcul de somme de Riemann à faible pas. Le rectangle peut être construit « à droite », « à gauche », ou encore « au milieu », ce qui est un peu plus précis.

— De façon similaire, les *méthodes des trapèzes*, par lesquelles la fonction à intégrer est approximée par une fonction affine par morceaux. Par exemple, sur l'image ci-après, l'intégrale de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $[0,2]$ est approximée par des trapèzes avec un pas de $0,2$. L'aire obtenue est d'environ 0.8818 u.a., la valeur réelle attendue étant de 0.8821 u.a.



— Plus généralement, en choisissant des approximations par des polynômes de degré n, on gagne en précision, mais le temps de calcul augmente.

Il est important de pouvoir donner une majoration de l'erreur commise en fonction des différents paramètres. La majoration dépend souvent des valeurs prises par les dérivées de la fonction intégrée. En notant $\|f'\|$ la plus grande valeur prise par $|f'$ sur $[a,b]$, $\|f''\|$ la plus grande valeur prise par $|f''|$, etc., on peut notamment démontrer que les erreurs données par la méthode des rectangles à gauche, des rectangles au milieu et des trapèze avec un découpage en n intervalles vérifient respectivement :

$$E_{\text{rect.g}} \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\|f'\| \ ; \qquad E_{\text{rect.m}} \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\| \ ; \qquad E_{\text{trap}} \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|.$$

Toutes ces inégalités pourront être démontrées avec les outils du programme du premier semestre de L1.

On propose l'implémentation Python suivante pour la méthode des rectangles « au milieu » :

```
def rectm(f, a, b, n):
    A = 0
    delta = (b-a) / n
    for i in range(n):
        xm = a + (i + 0.5)*delta
        ym = f(xm)
        A += delta*ym
    return A
```

Par exemple :

```
>>> from math import exp
>>> def f(x): return exp(-x**2)
...
>>> rectm(f,0,2,10)
0.8822020699923466
```

Exercice 53 Adapter la fonction précédente pour qu'elle renvoie l'intégrale d'une fonction calculée par la méthode des rectangles à gauche, à droite, et par la méthode des trapèzes.

Exercice 54 (méthode de Simpson) Adapter la méthode des trapèzes pour approximer la fonction f à intégrer sur chaque intervalle non plus par une fonction affine sur $[x_i, x_{i+1}]$, mais par un polynôme du second degré croisant la courbe représentative de f aux points d'abscisse x_i, $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1} (où les x_i sont les nombres $a + (b-a)\frac{i}{n}$). Écrire une fonction Python à cet effet.

On commencera par calculer explicitement les coefficients du polynôme d'interpolation sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, puis on calculera manuellement l'intégrale du polynôme sur cet intervalle.

Exercice 55 (lien avec la méthode d'Euler) On rappelle que l'intégrale de f sur $[a, b]$ est donnée par $F_a(b)$, où F_a est l'unique solution du problème $F_a' = f$ vérifiant $F_a(a) = 0$.

On cherche à calculer $F_a(b)$ avec la méthode d'Euler. À quelle méthode vue précédemment sommes-nous ramenés ?

5.2 Avec `scipy.integrate`

La bibliothèque `scipy.integrate` contient plusieurs fonctions « clef en main » permettant de calculer des intégrales de fonctions potentiellement compliquées. Ces fonctions ont l'avantage de préciser explicitement leur marge d'erreur.

La plus simple et précise de ces fonctions est `scipy.integrate.quad`, qui repose sur une méthode dite *de quadrature*. Par exemple :

```
    >>> from scipy.integrate import quad
    >>> from math import exp
    >>> def f(x): return exp(-x**2)
    ...
    >>> quad(f,0,2)
    (0.8820813907624215, 9.793070696178202e-15)
```

La première valeur représente la valeur de l'intégrale ainsi calculée, et la deuxième, l'erreur obtenue (qui est ici d'environ 10^{-14}).

`scipy` contient également une fonction calculant une intégrale par la méthode des trapèzes. Il est alors nécessaire de donner explicitement la valeur des x_i est des $f(x_i)$.

```
>>> import numpy as np
>>> x = np.linspace(0,2,1000) #Discrétisation de [0,2] à 1000 points
>>> y = np.exp(-x**2) #Calcule toutes les valeurs de f sur ces points
>>> from scipy.integrate import trapezoid
>>> trapezoid(y,x)
0.8820813662926712
```

5.3 Méthode de Monte-Carlo

Les méthodes dites *de Monte-Carlo* (en référence aux célèbres casinos) reposent sur une approche totalement différente. Il s'agit ici de faire de l'*échantillonnage*, en s'appuyant sur le résultat intuitif (mais qui peut être démontré rigoureusement) suivant :

Propriété 56 (admise) *Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ des domaines du plan vérifiant $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{E}$. Si X désigne un point aléatoire tiré dans $\mathscr{E}$ selon une loi uniforme, alors :*

$$\mathbf{P}(X \in \mathscr{D}) = \frac{\mathscr{A}(\mathscr{D})}{\mathscr{A}(\mathscr{E})}$$

où $\mathscr{A}$ désigne l'aire d'un domaine.

Supposons que l'on cherche à calculer l'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives f sur un intervalle $[a, b]$. On sait par ailleurs que sur cet intervalle f est majorée par M. Alors on peut poser :

$$\mathscr{E} = [a, b] \times [0, M] \ ; \qquad \mathscr{D} = \{P \in \mathscr{P} \ : a \leqslant x_P \leqslant b \ ; 0 \leqslant y_P \leqslant f(x_P)\}.$$

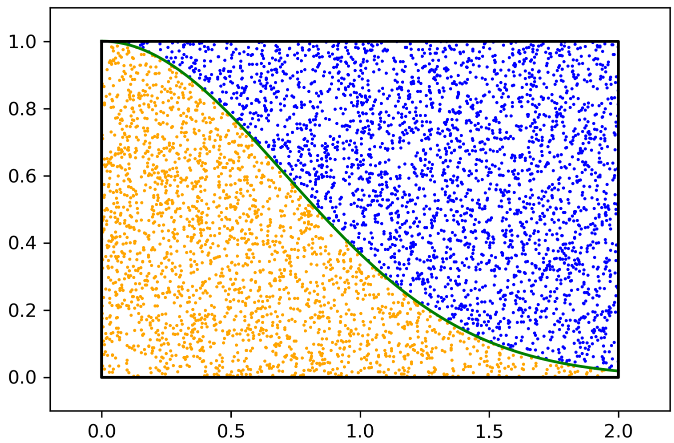
Avec ces notations, $\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\mathscr{A}(\mathscr{E}) = M(b-a)$. Il suit donc que :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = M(b-a) \times \mathbf{P}(X \in \mathscr{D}).$$

Il reste enfin à déterminer cette probabilité, notée par la suite p. On définit pour cela le schéma de Bernoulli dans lequel l'expérience consiste à tirer aléatoirement un point dans $\mathscr{E}$, et le succès est atteint si le point tiré tombe dans $\mathscr{D}$. Si l'expérience est répétée n fois de façon identique et indépendante et C_n est la variable aléatoire qui compte les succès, alors :

$$C_n \sim \mathscr{B}(n; p).$$

L'espérance de C_n est donc np. En approximant $p \sim \frac{C_n}{n}$, pour n grand, on obtient donc [1] un encadrement de p. La figure suivante illustre le résultat avec $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $[0 \ ; 2]$ avec $M = 1$, pour $n = 5000$. Sur ce tirage, on obtient $C_n = 2214$, soit $\int_0^2 f(t)\ \mathrm{d}t \approx 0.8852$ (au lieu de 0.882 environ attendu).



1. Ce résultat, que l'on appelle *loi des grands nombres*, est plus généralement ce qui justifie l'intérêt des sondages. Il sera partiellement démontré lors des derniers chapitres de probabilités de l'année.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 57 (méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales) *Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a,b]$. Soit $M \in \mathbf{R}_+$ majorant f. Soit C_n le nombre de succès obtenus dans le schéma de Bernoulli dont l'expérience consiste à tirer aléatoirement, indépendamment et selon des lois uniformes $X \in [a,b]$ et $Y \in [0,M]$, et le succès est obtenu si $Y \leqslant f(X)$, expérience renouvelée n fois. Alors, de façon presque sûre[2] :*

$$\lim_{n\to+\infty} M(b-a)\frac{C_n}{n} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

On remarque notamment que :

— L'erreur commise est proportionnelle à M. Aussi, il est souhaitable de choisir la meilleure majoration possible pour limiter l'erreur.

— Le calcul, probabiliste, peut être erroné. On peut toutefois démontrer des résultats permettant d'encadrer l'erreur avec une certaine probabilité, selon le principe des marges d'erreur. Par exemple, on peut démontrer des résultats du type « avec 95 % de chances, l'erreur est au plus de 10^{-3} ». Ces résultats seront étudiés au dernier chapitre de l'année.

Le résultat précédent nous donne une implémentation Python simple. Rappelons que `random.random()` renvoie un nombre pseudoaléatoire compris entre 0 et 1.

```python
from random import random
def montecarlo(f, a, b, M, n):
    """
        f : fonction positive à intégrer sur [a,b].
        M : majorant de f sur [a,b].
        n : nombre de tirages aléatoires.
    """
    count = 0
    for i in range(n):
        x = a + (b-a)*random() #Tire un nombre pseudoaléatoire entre a et b
        y = M*random() #Et entre 0 et M
        if y <= f(x):
            count += 1
    return M*(b-a)*count/n
```

```python
>>> from math import exp
>>> def f(x): return exp(-x**2)
...
>>> montecarlo(f, 0, 2, 1, 1000000)
0.882038
>>> montecarlo(f, 0, 2, 1, 10000000)
0.8822284
>>> montecarlo(f, 0, 2, 1, 10000000)
0.8819258
```

Bien sûr, le résultat manque de précision, et augmenter celle-ci est difficile car le tirage de nombres pseudoaléatoires est chronophage. La technique présente cependant un intérêt pour résoudre certains problèmes plus complexes d'intégration sur lesquels les méthodes d'interpolation échouent.

Exercice 58 Comment peut-on améliorer la précision de la méthode dans le cas où l'on connaît un minorant de f ?

2. Ce terme a un sens bien défini en probabilités, qui sera étudié en licence.

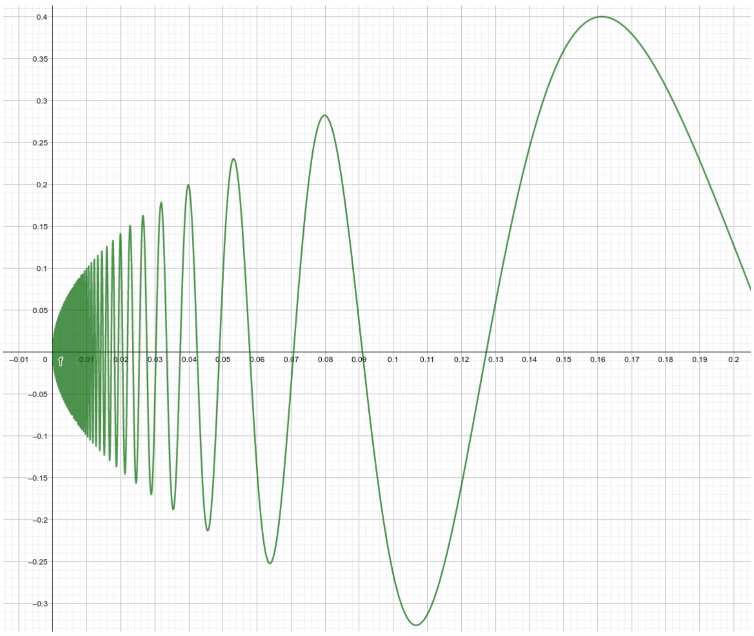
On suppose que f peut prendre des valeurs négatives. Comment peut-on appliquer la méthode de Montecarlo, en connaissant un minorant m et un majorant M de f sur $[a, b]$?

Exercice 59 À l'aide de la méthode de Monte-Carlo, trouver une approximation de la valeur de π.

Conclusion

La définition géométrique des intégrales des fonctions positives, bien que rigoureuse, présente des faiblesses. En effet, elle repose sur la notion d'aire, qui est difficile à cerner dans le cas où les fonctions concernées sont irrégulières (par exemple, pour une fonction fractale). La restriction aux seules fonctions continues est d'ailleurs assez artificielle.

Exemple 60 La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}\cos(x^{-1})$, prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$, est continue sur $\mathbf{R}_+$, mais quel sens donner à l'aire des domaines considérés ? Leur aire est-elle d'ailleurs vraiment bien définie ?



Redéfinir les intégrales de façon plus formelle est nécessaire pour affronter certaines fonctions plus « tordues », telles que celle-ci, et éviter les raisonnements circulaires. Plus généralement, certains théorèmes plus avancés mais importants requièrent des constructions rigoureuses. Les deux approches les plus courantes sont :

- L'approche de Riemann (1854), qui repose sur l'encadrement de l'aire considérée par des rectangles. Cette approche est enseignée en première année de licence.
- L'approche de Lebesgue (1902), à la fois plus complexe et plus riche. Celle-ci, enseignée en L3, permet de donner un sens aux intégrales d'une gamme beaucoup plus vaste de fonctions, mais aussi de reformuler toute la théorie des probabilités. On peut par exemple donner un sens à l'intégrale d'une fonction f telle que $f(x) = 1$ si x est rationnel et $x = 0$ sinon. On peut également voir la probabilité d'un événement et l'espérance d'une variable aléatoire comme des intégrales de certaines fonctions bien choisies.

Les acquis de ce chapitre

Démonstrations exigibles :

1. Théorème fondamental du calcul intégral, dans le cas où f est croissante et positive.
2. Intégration par parties.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Utiliser la définition géométrique de l'intégrale, notamment pour calculer des encadrements.
2. Travailler alternativement avec les différentes approches de l'intégrale : définition géométrique y compris dans le cas d'une fonction signée, passage du discret au continu à l'aide des sommes de Riemann, expression à l'aide des primitives.
3. Utiliser les différentes propriétés élémentaires de l'intégrale : linéarité, conservation des inégalités, relation de Chasles.
4. Faire une intégration par parties, éventuellement guidée.
5. Étudier des suites d'intégrales définies par récurrence.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

1. Calculs de l'activité introductive.
2. Relation de Chasles et intégration des inégalités (pour les fonctions positives puis pour les fonctions signées).
3. Corollaires du théorème fondamental du calcul intégral.
4. Inégalité triangulaire.

Principaux approfondissements.

1. Démonstration du théorème fondamental de l'analyse dans le cas général.
2. Intégrales de Wallis.
3. Méthodes des trapèzes et de Simpson, et leurs implémentations en Python.
4. Méthode de Monte-Carlo.
5. Réflexion sur les limites de la définition intuitive de l'intégrale.