Chapitre 11 C : résolution d'équations différentielles

Valentin Melot — Terminale spé maths A

27 avril 2021

Le but de ce chapitre est de donner une méthode concrète de résolution de certaines équations différentielles simples, des propriétés sur la structure de certaines équations, et de présenter les outils numériques permettant de traiter des équations différentielles plus complexes.

1 Équations d'intégration

On reformule en termes d'équations différentielles un résultat vu sur les primitives :

Propriété 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I.*
L'équation différentielle

$$y' = f(t)$$

a pour ensemble de solutions

$$\{t \longmapsto F(t) + C : C \in \mathbf{R}\}$$

où F est une primitive de f quelconque.

Propriété 2 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $n \in \mathbf{N}$.*
L'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t)$$

a pour ensemble de solutions

$$\{t \longmapsto F(t) + c_n t^n + \cdots + c_1 t + c_0 : (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n\}$$

où F est une solution particulière de l'équation.

(démonstration par récurrence)

Exercice 3 Résoudre l'équation de la chute libre sans frottements, introduite dans le chapitre 11 B.

Exercice 4 Déterminer l'ensemble des fonctions y telles que $y^{(3)} = \sin$, puis telles que $y^{(3)} = \sin^2$.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 5 *Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. On appelle* équation différentielle linéaire d'ordre 1 *une équation différentielle de la forme :*

$$y' + a(t)y = b(t).$$

La fonction b entrée *du système, et la fonction inconnue y* état *ou* sortie.

L'équation est dite homogène *si b est la fonction nulle. Elle est dite* à coefficients constants *si a est une fonction constante. Elle est dite* autonome *si a et b sont constantes.*

Pour une équation à coefficients constants, si $a > 0$, alors la constante $1/a$ est appelée caractéristique d'amortissement *du système.*

Exemple 6 Dans le circuit RC parallèle du chapitre 11 B, modélisé par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U = \frac{i}{C},$$

la sortie du système est la différence de potentiel aux bornes de la résistance U et l'entrée est (à une constante près) l'intensité i délivrée par le générateur.

Lorsque l'intensité est nulle (régime libre), l'équation est homogène. Elle est autonome lorsque le générateur délivre un courant constant et que la résistance R est constante. Elle est à coefficient constant lorsque la résistance R est constante ; en ce cas, son temps caractéristique d'amortissement est la durée $\tau = RC$.

2.1 Cas homogène à coefficient constant

Commençons par énoncer un théorème de structure simple.

Propriété 7 *Soit $a \in \mathbf{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est stable par combinaisons linéaires et contient la fonction nulle.*

En réalité, toutes les solutions sont même proportionnelles les unes aux autres, comme on le montrera ultérieurement.

Propriété 8 *Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Les deux propositions 7 et 8 sont à redémontrer dans le contexte de chaque exercice.

Théorème 9 *Soit $a \in \mathbf{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ forment exactement l'ensemble :*

$$\{t \longmapsto Ce^{-at} : C \in \mathbf{R}\}$$

(démonstration exigible)

Remarque 10 La preuve de ce résultat repose fortement sur le théorème selon lequel seules les fonctions constantes ont une dérivée nulle sur un intervalle.

Propriété 11 *Soient a, x_0 et y_0 trois réels. L'équation différentielle $y' + ay = 0$ admet une unique solution vérifiant de plus $y(x_0) = y_0$.*

Propriété 12 *Soit y une solution de $y' + ay = 0$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :*

- *$y(x_0) = 0$;*
- *$y'(x_0) = 0$;*
- *y est la fonction nulle.*

Propriété 13 *Soit y une solution de $y' + ay = 0$. Alors y et y' ne changent pas de signe.*

Remarque 14 En réalité, ces trois propositions pourraient être démontrées sans utiliser le théorème 28.

Remarque 15 Si l'on sait que y et y' ne changent pas de signe et ne sont jamais nulles, alors on peut retrouver l'ensemble des solutions en écrivant :

$$y' + ay = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a \iff (\ln|y|)' = -a.$$

En effectuant le changement de variable $z = \ln|y|$, on doit résoudre $z' = -a$. Donc z est une fonction affine de la forme $t \longmapsto -at + c$ (avec c réel quelconque), d'où pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|y(t)| = e^{-at+c}$, soit encore :

$$y(t) = \pm e^c e^{-at}.$$

On conclut en remarquant que $\pm e^c$ décrit $\mathbf{R}^*$ lorsque c parcourt $\mathbf{R}$.

Remarque 16 Dans l'équation $y' + ay = 0$, si $a < 0$, alors les solutions obtenues ont des limites infinies en $+\infty$. Lorsque y modélise une grandeur physique qui évolue au cours du temps, cette situation n'est normalement pas possible, à moins que le système soit « actif » (on rajoute une source d'énergie que l'on suppose inépuisable, par exemple).

2.2 Cas général à coefficients constants

Définition 17 *Soit $y' + ay = b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On appelle* équation homogène associée *l'équation $y' + ay = 0$.*

Le résultat suivant est à savoir redémontrer au cas par cas dans un exercice.

Théorème 18 (structure de l'espace des solutions) *Soit (E) une équation différentielle linéaire, (E_0) l'équation différentielle linéaire homogène associée, et y_0 une solution de (E). Alors :*

y est une solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est une solution de (E_0).

Remarque 19 Autrement dit, si f_0 est une telle solution particulière, l'ensemble des solutions est l'ensemble :

$$\mathscr{S}_{(E)} = \{f_0 + y \ : y \in \mathscr{S}_{(E_0)}\}.$$

Remarque 20 Dans le cas $a = 0$, on retombe sur l'équation $y' = b(t)$.

Sachant résoudre les équations homogènes à coefficients constants, la résolution des équations dans le cas général se ramène à la recherche d'une solution particulière. En terminale, cette recherche est le plus souvent guidée.

Propriété 21 (cas autonome) *Si b est constante, alors une solution particulière est la fonction constante $y : t \longmapsto \frac{b}{a}$.*

Cette valeur est appelée *valeur d'équilibre*. Si a est strictement positive, alors les solutions y sont les fonctions ayant une décroissance exponentielle vers la valeur d'équilibre.

Exercice 22 Résoudre l'équation de la chute libre avec frottements linéaires $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} = -g$ avec $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = h_0$.

Propriété 23 *Soient a, x_0 et y_0 trois réels, et b une fonction. L'équation $y' + ay = b(t)$ admet une unique solution vérifiant de plus $y(x_0) = y_0$.*

Les deux théorèmes suivants peuvent aider à la recherche d'une solution particulière.

Propriété 24 *Soit $a \neq 0$ une constante, et b une fonction. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b(t)$.*

1. *Si b est un polynôme de degré n, alors il existe un polynôme de degré n solution de (E).*
2. *Si b est une fonction sinusoïdale, alors il existe une fonction sinusoïdale de même pulsation solution de (E).*
3. *Si b est une fonction de la forme $x \longmapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$, alors il existe une fonction de la forme $x \longmapsto Ce^{\alpha x}$ (avec $C \in \mathbf{R}$) solution de (E).*

Théorème 25 (principe de superposition) *Considérons les équations $(E_1) : y' + ay = b_1(t)$ et $(E_2) : y' + ay = b_2(t)$. Si f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2), alors $f_1 + f_2$ est une solution de $(E_{1+2}) : y' + ay = b_1(t) + b_2(t)$.*

Remarque 26 Ce principe joue un rôle essentiel en électronique. En effet, dans le circuit RC vu au chapitre précédent, on avait remarqué que le signal d'entrée sinusoïdal $t \longmapsto i_0 \cos(\omega t)$ était déphasé et atténué, et que le déphasage $\varphi(\omega)$ et le coefficient d'atténuation $k(\omega)$ dépendaient de ω.

Si l'on considère maintenant un signal superposé de la forme :

$$b(t) = \sum_{j=1}^{n} i_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

alors une solution particulière du système sera :

$$U(t) = \sum_{j=1} k(\omega_j) i_j \cos(\omega_j t + \varphi_j + \varphi(\omega_j)).$$

On a par ailleurs vu que $k(\omega)$ avait pour limite 0 lorsque ω devenait grand. Autrement dit, le système RC joue un rôle de *filtre*, et coupe les hautes fréquences.

Théorème 27 *Si b est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors les solutions de l'équation $y' + ay = b(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

2.3 Approfondissement : cas général

On abandonne maintenant l'hypothèse selon laquelle a est une constante, et l'on choisit une fonction continue quelconque. En ce cas, les principaux théorèmes de structure vus restent vrais, à savoir :

— Pour une équation homogène, l'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle.

— Connaissant une solution particulière f_0, l'ensemble des solutions est de la forme $f_0 + y$ avec y solution de l'équation homogène associée.

— Le principe de superposition reste vrai pour la recherche d'une solution particulière.

La résolution d'une équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ reste relativement simple.

Théorème 28 (HP) *Soit a une fonction continue. L'ensemble des solutions de l'équation $y' + a(t)y = 0$ est :*

$$\{t \longmapsto Ce^{-A(t)} \ : C \in \mathbf{R}\}$$

où A est une primitive quelconque de a.

Remarque 29 Comme dans le cas homogène à coefficient constant, on peut retrouver le résultat par l'heuristique suivante (qui suppose de savoir que la solution ne change pas de signe) :

$$y' + a(t)y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a(t) \iff (\ln|y|)' = -a(t)$$

donc $\ln|y|$ est de la forme $-A(t)$ avec A une primitive de a, ce qui permet de conclure.

La recherche d'une solution particulière est en revanche ardue, et rarement satisfaisante, comme l'illustrait le cas du circuit RC à résistance variable du chapitre précédent.

Exercice 30 Déterminer les solutions de l'équation du circuit RC à résistance variable en régime libre introduit au chapitre 11 B.

Exercice 31 On se place sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2\tan(t)y = 0$. On pourra commencer par chercher une primitive de tan. Résoudre la même équation sur l'intervalle $J =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Que remarque-t-on ?

3 Approfondissement : d'autres équations différentielles simples

3.1 Oscillateur harmonique

On appelle *oscillateur harmonique* un système dont l'état est donné par une équation différentielle de la forme :

$$y'' + \omega_0^2 \, y = 0$$

avec $\omega_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Ce dernier réel est appelé la *pulsation propre* du système.

Cette équation décrit par exemple l'évolution au cours du temps de l'angle formé par un pendule avec la verticale, l'élongation d'un ressort en tension ou la charge d'un condensateur dans un circuit RLC.

On vérifie cette fois-ci à nouveau la propriété de structure suivante :

Propriété 32 *Soit $\mathscr{S}_{\omega_0}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2\, y = 0$. $\mathscr{S}_{\omega_0}$ est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle.*

Il a déjà été vu que les fonctions sinusoïdales de pulsation ω_0 étaient solutions de $y'' + \omega_0^2\, y = 0$. En réalité, ce sont les seules, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 33 (HP) *Les solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 sont les sinusoïdes de pulsation ω_0.*

La preuve de ce théorème est relativement simple en recourant aux *nombres complexes* (au programme de mathématiques expertes), à condition d'admettre qu'un certain nombre de propriétés des fonctions à valeurs réelles sont également valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Le théorème peut également être prouvé sans ces outils. On peut en effet se donner une solution y de l'équation $y'' + \omega_0^2\, y = 0$, poser la fonction $f : x \longmapsto \cos(\omega_0 t)$. On peut alors se placer sur un intervalle de la forme $]a, b[$ sur lequel f ne s'annule pas, et étudier le quotient $z = y/f$. Ce quotient vérifie en effet $z'' - 2\omega_0 \tan(\omega_0 t) z' = 0$. z' est donc solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 (mais qui n'est pas à coefficient constant) dont on connaît toutes les solutions (grâce au théorème 28). Finalement, on en arrive à la conclusion que z est obligatoirement une fonction de la forme $t \longmapsto A \tan(\omega_0 t) + B$, et donc que f est de la forme $t \longmapsto A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$. Il n'existe donc pas, sur l'intervalle $]a, b[$, de solution autre que les sinusoïdes de pulsation ω_0. Une dernière difficulté est de montrer que les constantes A et B sont les mêmes sur tous les intervalles de résolution considérés, ce qui se montre par des arguments de limite. Un tel raisonnement, bien que pouvant être entièrement mené avec les outils de terminale, reste assez laborieux.

Exercice 34 On s'intéresse à l'équation $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega t)$ (ω_0 peut être différent de ω). Déterminer une solution particulière de cette équation sous la forme d'une sinusoïde de pulsation ω, puis l'ensemble des solutions de cette équation.

Exercice 35 On considère une particule chargée, de charge q (positive ou négative) et de masse m, astreinte à se déplacer dans un plan. Ses coordonnées sont $(x(t), y(t))$. Cette particule est plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Elle est alors soumise à une unique force, appelée force de Lorentz, dont l'expression dépend de la vitesse de la particule et est :

$$\vec{F} = Bq(\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y).$$

Justifier que la particule vérifie les équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{Bq}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{Bq}{m}\dot{x} \end{cases}$$

En déduire que $\dot{x}$ et $\dot{y}$ vérifient chacune une équation d'oscillateur harmonique.

En déduire que la particule décrit une trajectoire circulaire homogène, dont le rayon et la vitesse ne dépendent que de la vitesse initiale. Que peut-on dire du travail de la force de Lorentz ? Les trajectoires possibles respectent-elles la loi de Kepler ?

3.2 Équation quadratique $y' + \alpha y^2 = 0$

On s'intéresse désormais aux équations de la forme $y' + \alpha y^2 = 0$, avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$.
Ces équations présentent deux difficultés :

— Elles ne sont pas *linéaires*. Autrement dit, si y_1 et y_2 sont deux solutions, il n'y a aucune raison pour qu'une combinaison linéaire soit également solution.

— Les solutions sont susceptibles de présenter des discontinuités. Plus exactement, on démontre qu'il n'existe aucune solution définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Supposons que y est une solution définie sur un intervalle I, et qu'elle ne s'y annule pas (on pourrait le démontrer). On peut alors écrire :

$$y' + \alpha y^2 = 0 \iff \frac{y'}{y^2} + \alpha = 0 \iff -\left(\frac{1}{y}\right)' + \alpha = 0 \iff \left(\frac{1}{y}\right)' = \alpha.$$

On peut alors faire un changement d'inconnue en posant $y = \frac{1}{z}$, et l'on obtient $z' = \alpha$. On en déduit que z a obligatoirement la forme :

$$z : t \longmapsto \alpha t + C$$

avec $C \in \mathbf{R}$.

Or, z ne peut, par construction, pas s'annuler. Donc I est nécessairement inclus dans l'un des intervalles $]-\infty, -\frac{C}{\alpha}[$ ou $]-\frac{C}{\alpha}, +\infty[$.

Finalement, y est de la forme $y : t \longmapsto \frac{1}{\alpha t + C}$. Mais cela n'aurait pas de sens de considérer des solutions sur $\mathbf{R}$ tout entier, et les intervalles sur lesquels les solutions sont définies dépendent de la solution !

Remarque 36 L'équation différentielle admet des solutions qui possèdent une limite infinie en un réel. Lorsque la grandeur modélisée est une grandeur physique, cette situation est plus difficile à interpréter que celle décrite à la remarque 16.

Lorsque la fonction considérée possède une limite *à droite* infinie, cela signifie que le phénomène physique considéré a pris des valeurs infinies, puis se « normalise » au cours du temps. On peut par exemple penser à l'univers après le Big Bang.

Mais lorsque la fonction admet une limite *à gauche* infinie, cela signifie que la grandeur tendra vers l'infini en un temps fini... puis n'aura plus de sens !

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible : ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ (ou, de façon équivalente $y' = ay$).

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Interpréter un phénomène naturel simple sous la forme d'une équation différentielle.
2. Vérifier qu'en fonction est solution d'une équation différentielle.
3. Résoudre une équation d'intégration lorsque les primitives sont calculables.
4. Donner les solutions des équations $y' + ay = 0$, $y' + ay = b$, avec a et b constantes, et connaître les principales propriétés de structure des ensembles.
5. Donner toutes les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' + ay = b(t)$, étant connue une solution particulière, et chercher une solution particulière de façon guidée.
6. Savoir démontrer certaines propriétés de structure simples de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle (par exemple, la stabilité par combinaison linéaire).

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

— Unicité de la solution d'une équation différentielle $y' + ay = b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.

— Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$, et de l'ensemble des solutions de $y'' + \omega_0^2 y = 0$.

— Principe de superposition.

— Résolution de $y' + \alpha y^2 = 0$.

Principaux approfondissements.

1. Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique, et éventuellement preuve du fait que les sinusoïdes sont les seules solutions (en AP).