

# Chapitre 11 B : introduction aux équations différentielles

Valentin Melot — Terminale spé maths A

20 avril 2021

## 1 Définition

**Définition 1** On appelle équation différentielle un problème dont les inconnues sont des fonctions, et défini par des relations faisant intervenir les dérivées des fonctions inconnues.

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à déterminer les fonctions qui la satisfont, ou éventuellement le sous-ensemble de ces fonctions qui vérifient en plus certaines conditions.

La définition précédente est volontairement informelle, pour rester générale.

**Exemple 2** Si  $f$  est une fonction dérivable, alors les problèmes suivants sont des équations différentielles :

- $y' = f$ , d'inconnue  $y$  ;
- $y' + f \cdot y = 0$ , d'inconnue  $y$  ;
- $\begin{cases} y'' = -x \\ x'' = -y, \end{cases}$  d'inconnues  $x$  et  $y$  ;
- $y' \circ y = 0$ , d'inconnue  $y$ .

Ces problèmes ont un niveau de complexité très différent, ici classé dans l'ordre croissant.

**Définition 3** On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la plus grande dérivée intervenant dans sa définition.

Le programme de terminale se concentre essentiellement sur certaines équations simples du premier ordre.

**Remarque 4 (notation)** Par convention, afin d'alléger les notations, on accepte de laisser, dans l'énoncé d'une équation différentielle, une variable libre, qui représente la fonction identité. On tolère alors des écritures mélangeant fonctions et variables, normalement interdites. Par exemple,

$$y'' + (1 + t^2)y' + \sin(t)y = e^t$$

est une façon impropre mais tolérée de désigner l'équation différentielle

$$y'' + fy' + \sin y = \exp$$

avec  $f : x \mapsto 1 + t^2$ .

## 2 Modèle de Malthus

On souhaite modéliser l'évolution de la population planétaire en fonction du temps. Soit  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la population à l'année  $n$ . On appelle  $\mu$  le taux de mortalité (c'est-à-dire la proportion de la population qui meurt au cours d'une année) et  $\nu$  le taux de natalité. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, p_{n+1} - p_n = \nu p_n - \mu p_n$$

soit en d'autres termes,

$$\forall n \in \mathbf{N}, p_{n+1} = (1 + \nu - \mu)p_n.$$

On reconnaît la caractérisation d'une suite géométrique de raison  $1 + \nu - \mu$ . La population tend exponentiellement vers  $+\infty$  si  $\nu > \mu$ , et décroît exponentiellement vers 0 si  $\nu < \mu$ .

On suppose maintenant que la population est suffisamment grande pour pouvoir approximer les « sauts » de population au regard de la population totale. Autrement dit, on modélise l'évolution de la population par une fonction continue<sup>1</sup>,  $P : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ .

Le nombre d'individus mourant à chaque instant est proportionnel au nombre total d'individus, d'un facteur  $m$ . Le nombre d'individus naissant à chaque instant l'est également, d'un facteur  $n$ . On peut donc écrire :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, P'(t) = (n - m)P(t)$$

$P$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' = (n - m)y$ . On peut montrer que les solutions sont exactement les fonctions de la forme  $t \mapsto Ae^{(n-m)t}$ , avec  $A$  une constante réelle (qui correspond à la population initiale). La population croît ou décroît exponentiellement selon que  $m > n$  ou  $m < n$ .

## 3 Modèle de Verhulst

Le Français Verhulst rejette la modélisation malthusienne, qui aboutit à la conclusion, en pratique non-vérifiée, d'une hausse exponentielle de la population. Selon lui, l'erreur est de considérer que  $m$  et  $n$  sont constantes.

Il propose un modèle à peine plus complexe, en supposant que  $m$  et  $n$  sont des fonctions affines de la population.  $m$  est croissante et  $n$  est décroissante (plus la population est nombreuse, plus la mortalité est importante, par exemple parce que la nourriture est moins abondante et les guerres plus nombreuses).  $m - n$  est donc une fonction affine  $y \mapsto a - by$ , avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .  $P$  vérifie alors pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $P'(t) = (m(P(t)) - n(P(t)))P(t)$ . C'est donc une solution de l'équation différentielle :

$$y' = (a - by)y$$

On peut démontrer que les solutions de cette équation différentielle sont exactement les fonctions de la forme :

---

1. On admet que cette hypothèse est pertinente ici. La discussion de ce genre d'hypothèses fait intervenir des outils de haut niveau, par exemple ce que l'on appelle les *exposants de Lyapunov*.

$$t \mapsto \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right) e^{-at}}$$

avec  $y_0 \in \mathbf{R}_+$  quelconque, et  $K = \frac{b}{a}$ .

**Exercice 5** Que représente  $y_0$  dans ce modèle ? Que représente  $K$  ? Que peut-on dire de l'évolution de la population ?

## 4 Modèle de Lotka-Volterra

On considère un système fermé constitué de lapins et de renards, dont le nombre  $\ell(t)$  et  $r(t)$  évolue au cours du temps de façon continue.

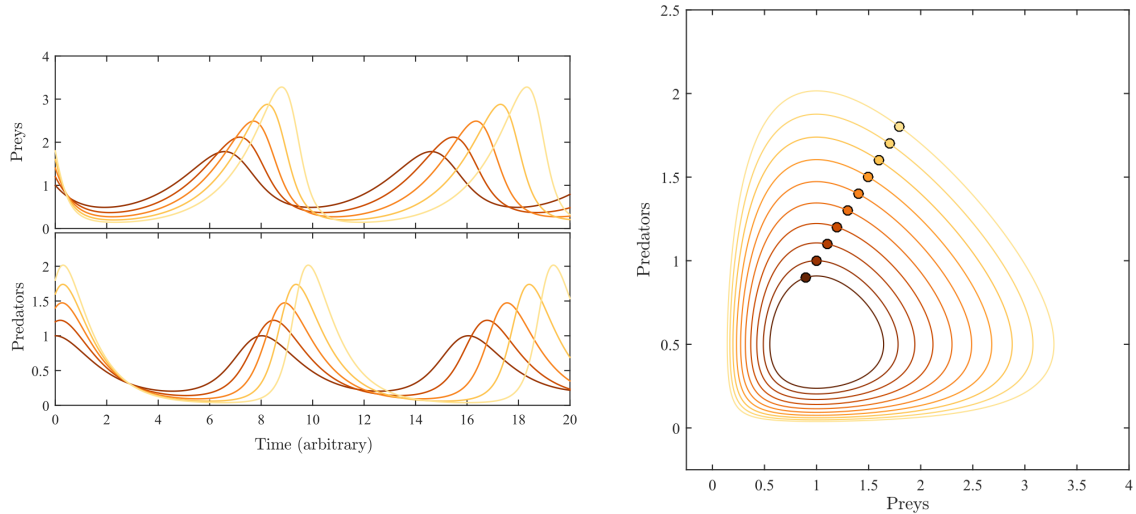
La natalité des lapins est constante, mais leur mortalité est fonction affine du nombre de renards. De même, la mortalité des renards est constante, mais leur natalité est fonction affine du nombre de lapins. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \ell' = (\alpha - \beta r)\ell \\ r' = (\delta\ell - \gamma)r. \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles couplées admet une infinité de solutions. La solution est par contre unique si l'on fixe  $r(0)$  et  $\ell(0)$ .

Une étude théorique des propriétés des solutions est possible, et l'on peut par exemple donner les valeurs moyennes de  $\ell$  et  $r$  ou prouver que ce sont des fonctions périodiques. On peut également démontrer que les populations restent bornées et ne s'éteignent pas.

En revanche, il est impossible d'exprimer à l'aide des fonctions usuelles la valeur de  $\ell(t)$  et de  $r(t)$  en fonction de  $t$ . Seules des approximations peuvent être calculées, à l'aide d'algorithmes de résolution d'équations différentielles. Sur les figures suivantes, les trajectoires ont été représentées pour  $\alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\beta = \frac{4}{3}$  et  $\gamma = \delta = 1$ , avec en plus la condition  $\ell(0) = r(0)$ . Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de cette condition initiale.

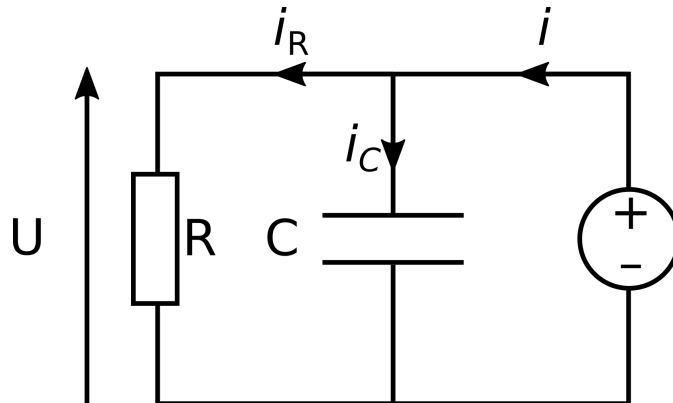


Évolution des populations au cours du temps, pour  $r(0) = \ell(0)$ , avec  $r(0) \in \{1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,6 ; 1,8\}$ .

Trajectoire du point  $(\ell(t), r(t))$  au cours du temps, pour  $r(0) = \ell(0)$ , avec  $r(0) \in \{0,9 ; 1 ; 1,1 ; \dots ; 1,8\}$ .

Brice2000, Wikimedia Commons, CC-BY-SA 4.0.

## 5 Circuit RC parallèle



On considère un circuit constitué d'une résistance  $R$  branchée en parallèle avec un condensateur  $C$  aux bornes d'un générateur fournissant une intensité  $i$  forcée.

On appelle  $U$  la tension aux bornes du générateur,  $i_R$  et  $i_C$  les intensités des courants traversant respectivement la résistance et le condensateur. On a  $i_R + i_C = i$  d'une part ;  $i_R = \frac{U}{R}$  et  $i_C = C \frac{dU}{dt}$  d'autre part. On en déduit que :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = \frac{i}{C}.$$

**Régime libre.** On suppose que  $R$  et  $C$  sont des constantes, et l'on pose  $\tau = RC$ . Le générateur est en position éteinte, de sorte que  $i$  est nulle au moment où le système est

branché. En ce cas, l'équation se simplifie en :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}U = 0.}$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est :

$$\mathcal{S}_1 = \{t \mapsto Ae^{-t/\tau} : A \in \mathbf{R}\}$$

En écrivant  $U = Ae^{-t/\tau}$ , on remarque que  $A = U(0)$ . Autrement dit, il peut exister une tension initiale, liée à la charge du condensateur. Celui-ci se vide dans la résistance, de sorte que la tension décroît exponentiellement.

**Régime sinusoïdal forcé.** On suppose toujours  $R$  et  $C$  constants. Cependant, le générateur est sous tension, et fournit une intensité forcée  $i = i_0 \cos(\omega t)$ .

L'équation devient alors :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}U = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t).}$$

L'ensemble des solutions est plus complexe que dans le cas précédent, en raison de l'apparition d'un second membre :

$$\mathcal{S}_2 = \{t \mapsto k_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) + Ae^{-t/\tau} : A \in \mathbf{R}\}$$

où

$$\varphi_\omega = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} ; \quad k_\omega = \frac{i_0}{C} \frac{\tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

sont des constantes qui dépendent du système. Comme dans le cas précédent,  $A$  dépend des conditions initiales du système.

Autrement dit, à une perturbation exponentielle décroissante près (qui dépend de la charge du condensateur), la tension aux bornes de la résistance évolue selon un régime sinusoïdal dont la pulsation est forcée par le condensateur. En revanche :

- Le système est déphasé ;
- Le signal est atténué, d'un coefficient qui dépend de la pulsation d'entrée  $\omega$ . Quand  $\omega$  est élevé, l'atténuation est forte : ici, on interdit le passage des hautes fréquences.

## 6 Divers modèles de chutes

On lâche un mobile de masse  $m$  sans vitesse à une altitude initiale  $h_0$ . Soit  $\vec{e}_z$  un vecteur unitaire dirigé à la verticale vers le haut. Les forces qui s'appliquent au mobile sont :

- Son poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$  ;
- Les frottements  $\vec{F} = f\vec{e}_z$ . Cette force dépend de la vitesse, selon une relation à déterminer ; on écrit pour l'instant simplement  $f$  comme une fonction de la vitesse :  $f(\dot{z})$ .

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération reçue par le mobile est  $\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{P} + \vec{F})$ . En écrivant  $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$ , et en projetant selon l'axe  $(Oz)$ , on obtient :

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{m}f(\dot{z}).$$

On peut alors proposer plusieurs modélisations, qui mènent à des résultats différents :

**Frottements négligés.** En négligeant les frottements, on a  $f(v) = 0$ . On aboutit à l'équation :

$$\boxed{\ddot{z} = -g.}$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle simple est :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{2}gt^2 + At + B : A, B \in \mathbf{R} \right\}$$

Avec les conditions initiales (pas de vitesse et altitude  $h_0$  en début de chute), on obtient :

$$z : t \mapsto h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

**Frottements linéaires.** En adoptant le modèle des frottements linéaires, on pose  $f(\dot{z}) = -\alpha\dot{z}$ , avec  $\alpha > 0$  constante. L'équation obtenue est alors :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} = -g.}$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ t \mapsto -\frac{gm}{\alpha}t + Ae^{-\frac{\alpha}{m}t} + B : A, B \in \mathbf{R} \right\}$$

Les conditions initiales permettent de garantir ici que  $A = -g\frac{m^2}{\alpha^2}$  et  $B = h_0 + g\frac{m^2}{\alpha^2}$ .

**Frottements quadratiques.** Dans un modèle de frottements quadratiques, on écrit  $f(\dot{z}) = \beta\dot{z}^2$  avec  $\beta > 0$  (les frottements sont dirigés vers le haut) constante. L'équation du mouvement est donc :

$$\boxed{\ddot{z} - \frac{\beta}{m}\dot{z}^2 = -g.}$$

La résolution est, en ce cas, significativement plus complexe. L'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ t \mapsto A - \frac{m}{\beta} \left( \ln \cosh \left( \sqrt{\frac{\beta g}{m}} t + B \right) \right) \right\}$$

où  $\cosh$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ .

Les conditions initiales assurent alors que  $A = h$  et  $B = 0$ .

**Remarques.** Ces trois modélisations sont pertinentes en physique, en fonction des circonstances. On remarque que la complexité des solutions (et de la résolution est croissante).

À chaque fois, l'équation du mouvement donne une famille de solutions qui dépend de deux paramètres réels. Les deux conditions initiales (vitesse et position de départ) suffisent alors à décrire précisément la trajectoire.

On remarque par ailleurs qu'en posant  $v = \dot{z}$  la vitesse, celle-ci vérifie une équation d'ordre 1 seulement. Pour résoudre l'équation en  $z$ , on commence en réalité par résoudre l'équation en  $v$ , puis on cherche une primitive du résultat.

**Exercice 6** Étant admis les ensembles de solutions  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$ , calculer dans chaque cas les valeurs des constantes  $A$  et  $B$  à partir des conditions initiales.

## 7 Oscillateurs masse-ressorts

**Oscillateur harmonique.** On considère un mobile de masse  $m$ , astreint à glisser sans frottement le long d'un axe  $(Ox)$ . L'origine est placée sur la position d'équilibre, c'est-à-dire que le ressort est détendu lorsque  $x = 0$ .

Le ressort subit une unique force, dite force de rappel, par laquelle le ressort tend à ramener le mobile vers sa position d'équilibre. En première approximation, cette force peut être modélisée comme  $\vec{f}_r = -kx\vec{e}_x$  (loi de Hooke), avec  $k$  la raideur du ressort (constante).

L'accélération du mobile est  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ . D'après le principe fondamental de la dynamique,  $\vec{f}_r = m\vec{a}$ , d'où l'on déduit que :  $m\ddot{x} = -kx$ , soit finalement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Cette équation, appelée équation de l'oscillateur harmonique, a pour solutions l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Autrement dit, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto A \cos(\omega_0 t + \varphi) : A, \varphi \in \mathbf{R}\}$$

et les constantes  $A$  et  $\varphi$  sont déterminées par les conditions initiales (position initiale et vitesse initiale du mobile).

**Exercice 7** On donne :  $k = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Les conditions initiales sont  $x(0) = 2 \text{ cm}$  et  $\dot{x}(0) = 0$ . On observe des oscillations de période  $1,1 \text{ s}$ . Déterminer  $m$ .

**Oscillateur amorti.** On place maintenant ce système dans un fluide visqueux (par exemple de l'eau), de sorte que le mobile subit en plus une force de frottements linéaire  $\vec{f}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$ . L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Les solutions dépendent alors des valeurs relatives de  $\alpha$ ,  $m$  et  $k$ . Selon les cas<sup>2</sup>, elles peuvent prendre l'une des formes suivantes :

$$t \mapsto Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} ; \quad t \mapsto e^{-t/\tau}(At + B) ; \quad t \mapsto Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) ;$$

où  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau$  et  $\omega$  dépendent du système, et  $A$ ,  $B$  et  $\varphi$  dépendent des conditions initiales.

## 8 Circuit RC à résistance variable

On reprend le circuit RC parallèle précédemment utilisé. On remplace cependant  $R$  par une résistance variable, que l'on programme pour vérifier  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}(1 - \cos(\omega t))$ . En particulier, cela signifie que la résistance est initialement infinie, ou autrement dit que le circuit est au début de l'expérience.

L'équation de la tension aux bornes du générateur prend la forme :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}(1 - \cos(\omega t))U = \frac{i}{C}.$$

Contrairement à tous les exemples vus précédemment, l'un des coefficients intervenant devant la fonction inconnue ( $U$ ) est non-constant. Cette subtilité rajoute un niveau de complexité.

**Régime libre.** On revient à la situation où le générateur est ouvert, c'est-à-dire  $i = 0$ . L'équation est alors :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}(1 - \cos(\omega t))U = 0.}$$

Ses solutions sont :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ t \mapsto A \exp\left(-\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)\right) : A \in \mathbf{R} \right\}$$

Là encore,  $A$  dépend des conditions initiales, et correspond plus précisément à la tension initialement aux bornes du condensateur. Le phénomène de décroissance exponentielle est modulé par la variation de la résistance.

**Régime sinusoïdal.** Si l'on suppose maintenant que le générateur est en régime sinusoïdal, c'est-à-dire qu'il impose un courant d'intensité  $i = i_0 \cos(\omega t)$ , l'équation devient :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau}(1 - \cos(\omega t))U = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t).}$$

On peut facilement montrer qu'il existe une fonction  $f$  telle que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_2 = \{f + g : g \in \mathcal{S}_1\}$$

---

2. En fait, selon que la quantité  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$  est plus grande ou plus petite que 0, 5.



Autrement dit, toute solution est somme d'une fonction de  $\mathcal{S}_1$  et de  $f$ , que l'on appelle « solution particulière ». Cependant, cette solution particulière est difficile à exprimer. On peut l'écrire :

$$f : t \mapsto \frac{i_0}{C} \exp\left(-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)\right) f_0(t)$$

où  $f_0$  est une primitive (impossible à exprimer simplement) de la fonction

$$t \mapsto \exp\left(\frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)\right) \cos(\omega t).$$

## 9 Conclusion

Les exemples précédents ont permis d'illustrer, à partir d'exemples réels, l'omniprésence des équations différentielles en sciences, en particulier en physique.

Schématiquement, une large partie du travail, dans de nombreuses branches des sciences, consiste à concevoir et appliquer des modèles permettant de traduire une situation sous la forme d'une équation — et bien souvent, d'une équation différentielle. Dans un second temps, l'étude de l'équation sous son angle mathématique permet de fournir des prédictions, à supposer bien entendu que la modélisation initiale est correcte.

Les situations mathématiques dans lesquelles une résolution complète est possible sont cependant rares, et supposent souvent des approximations préalables. Par exemple, en physique, on sera conduit à négliger un certain nombre d'interactions (frottements, forces extérieures. . .) ou à les modéliser par comportements linéaires (c'est-à-dire que l'effet est proportionnel à la cause).

L'étude des équations différentielles peut se décliner, grossièrement, en quatre branches :

1. Résolution complète. Il s'agit d'exprimer explicitement les solutions d'une équation, ou tout du moins de ramener la description de l'ensemble des solutions à quelques briques élémentaires (pouvant par exemple faire intervenir une primitive non explicite d'une fonction). Nous verrons, au prochain chapitre, comment résoudre complètement certaines équations simples, telles que l'équation le modèle de croissance de Malthus, celle de la chute libre ou avec frottements linéaires, ou les équations des circuits RC (sans résistance variable). Les équations de l'oscillateur harmonique ou amorti et du circuit RC avec résistance variable sont au programme de première année de licence de mathématiques.
2. Approximation algorithmique. À défaut de donner une formule algébrique pour les fonctions solutions, on peut espérer écrire des algorithmes permettant d'approximer la valeur en un certain nombre de points, avec une erreur maîtrisée. La méthode la plus simple, dite *méthode d'Euler*, sera vue au prochain chapitre. Certaines méthodes plus puissantes sont facilement utilisables avec Python, par exemple la *méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4*, utilisée pour tracer les courbes du modèle de Lotka-Volterra ci-dessus.
3. Étude de l'espace des solutions. On cherche par exemple à montrer l'existence ou l'unicité de solutions vérifiant certaines conditions initiales. Il est possible d'étudier la structure qu'elles ont ; par exemple montrer qu'une combinaison linéaire de deux solutions est solution (c'est le cas pour plusieurs équations ci-dessus), ou déterminer

le nombre de solutions initiales requises pour décrire complètement l'évolution du système.

4. Étude du comportement des solutions. Dans certains cas, on peut se poser, sans connaître l'expression exacte des fonctions, des questions à leur sujet qui sont susceptibles d'avoir un sens physique : sont-elles stables ? certaines grandeurs (l'énergie, par exemple) sont-elles conservées ? Font-elles apparaître un amortissement, c'est-à-dire ces grandeurs tendent-elles vers zéro ? Que peut-on dire du nombre de fois où elles s'annulent ? Etc. Par exemple en physique :

- Le comportement des plasmas est décrit par une équation différentielle<sup>3</sup> dite *de Vlasov-Poisson*. Un phénomène de physique des plasmas, appelé *amortissement Landau*, est connu depuis les années 1940. Une question qui se posait était : les équations permettent-elles de prévoir l'observation physique, ou bien au contraire faut-il compléter le modèle pour en rendre compte ? Les mathématiciens Clément Mouhot et Cédric Villani ont répondu par l'affirmative à cette question en 2009<sup>4</sup>. Autrement dit, ils ont démontré que les solutions *mathématiques* des équations modélisant la *physique* du plasma vérifiaient une propriété *mathématique* traduisant le phénomène *physique* observé. Ce résultat a valu la médaille Fields à Cédric Villani en 2010.
- De même, le comportement des fluides est modélisé par quelques équations appelées *équations de Navier-Stokes*. Bien que ce modèle soit à la base de la mécanique des fluides, personne n'a à ce jour réussi à démontrer l'existence de solutions « réalistes » (dans un sens bien défini mathématiquement) à ces équations dans certains cas. Autrement dit, dans certaines situations modélisées par ces équations, on observe un phénomène physique simple, mais on ne parvient pas à le prévoir mathématiquement à partir du modèle. La preuve mathématique de l'existence d'une solution à ces équations ou de leur inexistence (qui forcerait à revoir le modèle) est un des problèmes du millénaire, dont la résolution est récompensée par un prix d'un million de dollars.

---

3. Plus exactement, une équation aux dérivées partielles.

4. Clément Mouhot et Cédric Villani, « On Landau damping », *Acta Mathematica*, 2011, 207 (1), p. 29-201. L'article peut être lu à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00376547/document>.