Chapitre 11 A : calcul de primitives

Valentin Melot — Terminale spé maths A

19 avril 2021

L'on a défini, en classe de première, la dérivée d'une fonction. L'on a pu calculer explicitement la dérivée de toute fonction algébrique, ainsi que de nombreuses autres fonctions dont la définition est plus complexe (exp et ln, ainsi que sin et cos notamment). L'on sait, en toutes circonstances, calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'une composée, d'un quotient, du moment que celles-ci sont définies.

La recherche de primitive correspond au problème inverse : étant donnée une fonction f, on recherche une fonction F dérivable telle que $F' = f$. Ce problème est loin d'être artificiel. Par exemple :

- Connaissant la vitesse d'un objet au cours du temps, la détermination de sa position correspond à un calcul de primitive.
- Dans certains systèmes physiques, on peut montrer que le signal obtenu en sortie a pour dérivée le signal d'entrée. C'est le cas par exemple d'un condensateur, en considérant l'entrée comme l'intensité du courant le traversant et la sortie comme la tension à ses bornes.
- L'on montrera que certains problèmes de calcul d'aire se ramènent à des calculs de primitives : c'est l'objet de la théorie de l'intégration.
- De nombreuses situations en sciences font intervenir des relations entre une fonction et sa dérivée (équations différentielles) : leur résolution repose sur des calculs de primitive.

1 Aspects théoriques

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un ensemble E qui est un intervalle ou une réunion d'intervalle. On dit que F est une* primitive *de f si F est dérivable sur E et si pour tout $x \in E$, $F' = f$.*

Remarque 2 On dit que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur E.

Remarque 3 Attention, il n'y a pas d'unicité de la primitive d'une fonction sur un intervalle, puisque si f admet pour primitive F, alors la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbf{R}$ constante) est également une primitive de f. On ne peut donc pas parler de *la* primitive de f, ni dire que *la* primitive est linéaire, etc.

Les résultats suivants permettent de décrire l'ensemble des primitives d'une fonction.

Lemme 4 (essentiel – admis) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' est nulle sur I. Alors f est constante.*

Ce résultat est difficile à prouver avec les seuls outils du programme de terminale. Une preuve est proposée en approfondissement.

Contre-exemple 5 Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. Par exemple, si f est la fonction définie sur $[0, 1] \cup [2, 3]$ nulle en tout point de cet intervalle, alors la fonction F définie sur le même intervalle, telle que $F(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $F(x) = 2$ si $x \in [2, 3]$ est une primitive de f mais n'est pas constante.

Remarque 6 Une fonction n'admet pas nécessairement de primitive. Nous montrerons toutefois au prochain chapitre que certaines classes de fonctions, dont notamment les fonctions continues, admettent des primitives sur I. L'exercice suivant fournit un contre-exemple.

Exercice 7 Soit f la fonction nulle sur $\mathbf{R}^*$ et valant 1 en 0. Démontrer que f n'admet pas de primitive sur $\mathbf{R}$.

Théorème 8 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $F - G$ est une fonction constante.*

(démonstration exigible)

Propriété 9 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f possède une primitive sur I. Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$, il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.*

(démonstration)

Remarque 10 En d'autres termes, si F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\mathscr{S} = \{F + \lambda\mathbf{1} \ : \lambda \in \mathbf{R}\}$$

où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur I.

Cet ensemble est donc une « droite » de l'espace des fonctions, passant par le « point » F et ayant pour « direction » $\mathbf{1}$.

De façon générale, les situations où l'ensemble des solution d'une équation différentielle peut être trouvé en connaissant une solution particulière sont assez fréquentes.

Des conditions supplémentaires (condition initiale, condition aux bords) sont souvent nécessaires pour déterminer uniquement la solution.

2 Aspects pratiques

Pour trouver une primitive d'une fonction donnée, on procède par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles et l'on « inverse » les règles de calcul de dérivées.

Propriété 11 *Soient* $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ *et* $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

La fonction $t \mapsto \dots$	*a pour primitive* $t \mapsto \dots$	*sur l'ensemble*
0	c	$\mathbf{R}$
a	$at + c$	$\mathbf{R}$
t	$\frac{t^2}{2} + c$	$\mathbf{R}$
t^n	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbf{R}$
t^k	$\frac{t^{k+1}}{k+1} + c$	$\mathbf{R}_{-*}$ <u>*ou*</u> $\mathbf{R}_+^*$
t^α	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\mathbf{R}_*^+$
e^{at+b}	$\frac{1}{a}e^{at+b} + c$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{t}$	$\ln \lvert t \rvert + c$	$\mathbf{R}_-^*$ <u>*ou*</u> $\mathbf{R}_+^*$
$\cos t$	$\sin t$	$\mathbf{R}$
$\sin t$	$-\cos t$	$\mathbf{R}$

avec $c \in \mathbf{R}$.

Remarque 12 Lorsqu'une fonction est définie sur plusieurs intervalles, il n'est pas obligatoire que les constantes soient les mêmes sur les différents intervalles.

Remarque 13 Attention, il est essentiel de ne pas oublier les constantes dans les primitives, au risque de perdre des solutions à certains problèmes.

Par exemple, si l'on cherche une fonction f telle que $f'' = 0$, il serait tentant de remarquer que $f = 0$ convient, et de dire que les solutions sont toutes les fonctions constantes. En réalité, les solutions sont les fonctions affines.

Propriété 14 *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* I, *et* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Soient* F *et* G *une primitive de* f *et* g *respectivement. Alors :*

— *Une primitive de* $f + g$ *est* $F + G$.

— *Une primitive de* $\lambda \cdot f$ *est* $\lambda \cdot F$.

Remarque 15 Les résultats précédents ne donnent aucune règle pour trouver une primitive d'un produit ou d'un quotient.

Exercice 16 Après avoir calculé la dérivée de la fonction $x \mapsto x \ln x$, déterminer une primitive de la fonction ln.

Exercice 17 Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sous la forme d'un produit d'un polynôme et de la fonction exponentielle.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x^n e^x$ sous la forme d'un produit d'un polynôme et de la fonction exponentielle.

Exercice 18 (conceptuellement difficile) En utilisant le résultat de l'exercice précédent, démontrer que pour tout polynôme P, il existe un polynôme $\widetilde{P}$ tel que la fonction $x \mapsto \widetilde{P}(x)e^x$ soit primitive de la fonction $x \mapsto P(x)e^x$. Démontrer que $\widetilde{P}$ est unique.

On note $\varphi : P \mapsto \widetilde{P}$ (c'est-à-dire que φ est une application qui prend comme argument un polynôme et renvoie le polynôme $\widetilde{P}$ précédemment déterminé). Justifier que pour tous polynômes P et Q et pour tout réel λ, on a $\varphi(\lambda.P) = \lambda.\varphi(P)$, et que $\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$. *On dit que l'application φ est linéaire.*

On considère comme ensembles de départ et d'arrivée pour φ l'ensemble des polynômes. φ est-elle injective ? Surjective ?

Pour l'application des règles de composition, il est difficile d'énoncer un résultat similaire au précédent en raison de problèmes d'intervalles de définition. On préfère donc présenter les résultats en faisant apparaître des dérivées.

Propriété 19 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. ALors :*

- *$u'e^u$ a pour primitive sur I : e^u ;*
- *Si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u'}{u^2}$ a pour primitive sur I : $\frac{-1}{u}$;*
- *Plus généralement, pour tout $\alpha \neq -1$, $u'u^\alpha$ a pour primitive sur I : $\frac{1}{\alpha}u^{\alpha+1}$ (si $\alpha < 0$, alors cela n'a de sens que si u ne s'annule pas sur I) ;*
- *Si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u'}{u}$ a pour primitive sur I : $\ln|u|$;*
- *Et plus généralement enfin, si f est une fonction dérivable sur $u(I)$, alors $u' \times f' \circ u$ a pour primitive sur I : $f \circ u$.*

En pratique, les primitives impliquant une composée seront le plus souvent données en terminale. Il est bon de savoir reconnaître les formes $u'u^\alpha$ et $u'e^u$.

Exercice 20 Déterminer les primitives de la fonction $x \longmapsto xe^{x^2}$.

Exercice 21 Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{(\ln x)^\alpha}{x}$ sur $]1, +\infty[$. On distinguera le cas où $\alpha = -1$.

Exercice 22 On définit la fonction tan : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$. Déterminer une primitive de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3 Conclusion

Le calcul de primitives de quelques fonctions « de référence » (polynômes, exponentielle, sinus et cosinus) et de leurs combinaisons linéaires est facile. Au-delà, les outils disponibles sont relativement limités : il n'existe pas de moyen direct de calculer une primitive d'un produit ou d'une composée.

Diverses méthodes peuvent permettre de transformer certains de ces problèmes de calculs de primitives pour les simplifier : l'intégration par parties, qui sera vue plus tard dans l'année, peut aider à la primitivation d'un produit ; certains changements de variables (méthode hors-programme en terminale) peuvent aider à traiter des composées. Aucune de ces méthodes ne permet toutefois de venir à bout de tous les problèmes.

Par exemple :

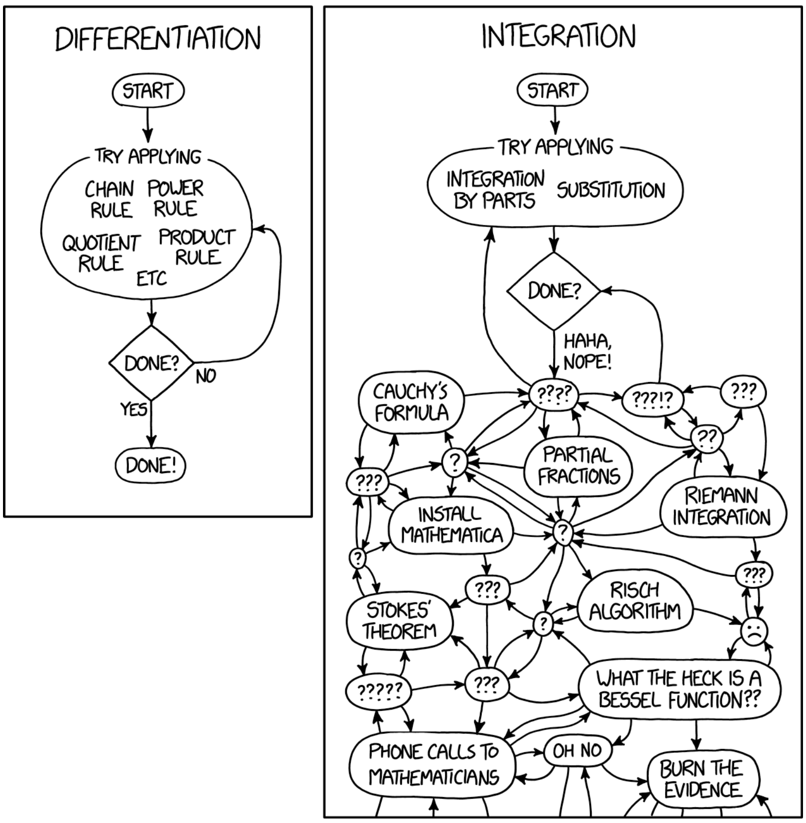
— Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{x^8}{x^4+1}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{5}x^5 + x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\Big) + C$$

avec $C \in \mathbf{R}$. Cette primitive est obtenue en utilisant des outils élémentaires (ce que l'on appelle une décomposition en éléments simples), mais la mise en pratique est particulièrement calculatoire. Le développement des logiciels de calcul formel, capables de faire ces calculs automatiquement, permet d'éviter bien des erreurs.

— En revanche, les primitives suivantes ne peuvent pas être exprimées sous forme algébrique :
  — Les primitives de $x \mapsto e^{-x^2}$ sont essentielle en probabilités ;
  — Les primitives de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ qui interviennent en interférométrie ;
  — Les primitives de $x \mapsto \sqrt{\frac{1-at^2}{1-t^2}}$ $(a > 0)$ donnent la circonférence d'une ellipse.

Ces primitives existent, peuvent être étudiées, leurs valeurs peuvent être approximées par des algorithmes de calcul, mais il est impossible de leur trouver une formule pour les exprimer plus simplement.



Randall Munroe, *Differenciation and Integration*, xkcd n° 2117, CC-BY-NC 2.5

Les acquis de ce chapitre

Démonstration exigible : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante (étant admis que les seules primitives de la fonction nulle sur un intervalle sont les constantes).

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée, chercher une primitive sous une forme donnée.
2. Donner les primitives des fonctions de référence (puissances, exponentielle, sinus et cosinus) et de leurs combinaisons linéaires.
3. Savoir, par tâtonnements, trouver des primitives de quelques fonctions simples.
4. Décrire l'ensemble des primitives d'une fonction, une primitive étant identifiée.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

— Unicité de la primitive d'une fonction définie sur un intervalle prenant une valeur donnée en un point donné.

— Primitives des fonctions de référence, d'une combinaison linéaire.

Principaux approfondissements.

1. Preuve du fait que les seules primitives de la fonction nulle sur un intervalle sont les constantes (par dichotomie).
2. Utilisation d'un logiciel de calcul formel pour calculer une primitive.