Chapitre 10 : trigonométrie

Valentin Melot — Terminale spé maths A

12 mars 2021

1 Éléments de trigonométrie : approche géométrique

1.1 Cercle trigonométrique (rappels de première)

Définition 1 *Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, orienté en sens direct. Soit $\theta \in \mathbf{R}$.*

On appelle sinus *et* cosinus *du réel θ l'abscisse et l'ordonnée de l'unique point M à distance 1 de O tel que la mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (en radians) soit égale à θ.*

Propriété 2 *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.*

Propriété 3 (angles remarquables) *On a :*

— $\cos 0 = \dots$, $\sin 0 = \dots$;

— $\cos\frac{\pi}{6} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{6} = \dots$;

— $\cos\frac{\pi}{4} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{4} = \dots$;

— $\cos\frac{\pi}{3} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{3} = \dots$;

— $\cos\frac{\pi}{2} = \dots$, $\sin\frac{\pi}{2} = \dots$;

— $\cos\pi = \dots$, $\sin\pi = \dots$.

Propriété 4 (arcs associés) *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a :*

— $\cos(-\theta) = \cos\theta$;

— $\sin(-\theta) = -\sin\theta$;

— $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$;

— $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$;

— $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$;

— $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$;

— $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$;

— $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$;

— $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$;

— $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

— $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$;

— $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$.

Propriété 5 (cas d'égalité) *Soient $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$.*

1. $\cos\theta' = \cos\theta$ *si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = -\theta + 2k\pi$.*
2. $\sin\theta' = \sin\theta$ *si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$ ou $\theta' = \pi - \theta + 2k\pi$.*

1.2 Formules d'addition et conséquences

Théorème 6 (fondamental, à connaître par cœur) *Soient a et a deux réels. On a :*

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$;
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Corollaire 7 (formules de duplication et de linéarisation) *Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :*

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$;
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$;
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$;
- $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Exercice 8 Déterminer la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice 9 Déterminer deux polynômes P et Q, de degré 5, tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(5x) = P(\cos(x))$ et $\sin(5x) = Q(\sin(x))$. Puis :

1. Déterminer $\cos \frac{\pi}{10}$. On pourra commencer par démontrer que $\cos \frac{\pi}{10}$ est une racine de P.
2. Déterminer $\sin \frac{\pi}{5}$.
3. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$ de deux façons différentes.
4. Justifier que $\cos \frac{\pi}{5}$ est une racine du polynôme $P+1$. En vous aidant d'un logiciel de calcul formel, factoriser ce polynôme, puis en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$ d'une troisième façon.

Corollaire 10 (HP — à savoir retrouver) *Soient a et b deux réels. On a :*

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$;
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$;
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

Corollaire 11 (HP — à savoir retrouver) *Soient p et q deux réels. On a :*

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

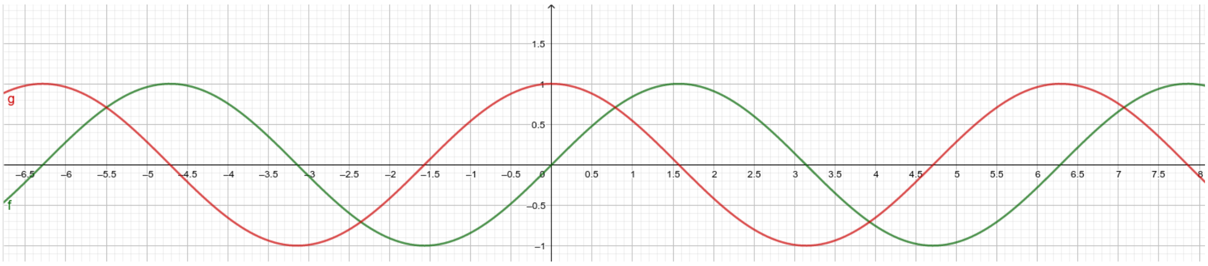

FIGURE 1 – Courbes représentatives des fonctions sinus (en vert) et cosinus (en rouge).

2 Approche analytique des fonctions circulaires

Définition 12 *On appelle* fonction sinus *et* fonction cosinus *les fonctions définies sur* $\mathbf{R}$ *qui à tout réel x associent respectivement les réels* $\sin x$ *et* $\cos x$*.*

Propriété 13
1. $\cos$ *est 2π-périodique et paire.*
2. $\sin$ *est 2π-périodique et impaire.*

Lemme 14 *Pour tout* $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$.

Propriété 15 *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues sur* $\mathbf{R}$.

Lemme 16

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \ ; \quad \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Propriété 17 $\sin$ *et* $\cos$ *sont dérivables sur* $\mathbf{R}$*, et vérifient :*

$$\sin' = \cos \ ; \qquad \cos' = -\sin .$$

Corollaire 18 $\cos$ *est croissante sur les intervalles de la forme* $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$*, et décroissante sur les intervalles de la forme* $[2k\pi, (2k+1\pi)]$ *(avec $k \in \mathbf{Z}$).*

$\sin$ *est croissante sur les intervalles de la forme* $\left[\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$ *et décroissante sur les intervalles de la forme* $\left[\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right]$ *(avec $k \in \mathbf{Z}$).*

Remarque 19 On peut alors résoudre des inéquations impliquant cos et sin sur un intervalle élémentaire de longueur π (généralement $[0, \pi]$ ou $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), puis sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exercice 20 Résoudre l'inéquation $\cos(2x) \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[0, \pi]$, puis sur $\mathbf{R}$.

Propriété 21 $\sin$ *et* $\cos$ *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$*. Elles vérifient : pour tout* $k \in \mathbf{N}$*,*

$$\begin{array}{llll} \sin^{(4k)} = \sin \ ; & \sin^{(4k+1)} = \cos \ ; & \sin^{(4k+2)} = -\sin \ ; & \sin^{(4k+3)} = -\cos \ ; \\ \cos^{(4k)} = \cos \ ; & \cos^{(4k+1)} = -\sin \ ; & \cos^{(4k+2)} = -\cos \ ; & \cos^{(4k+3)} = \sin . \end{array}$$

Remarque 22 Les fonctions sin et cos sont donc convexes là où elles sont négatives, et concaves là où elles sont positives.

Exercice 23 Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

On prolonge la fonction par continuité en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$, et $\tilde{f}(0) = 0$. $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

3 Fonctions sinusoïdales

Définition 24 *On appelle* fonction sinusoïdale *toute fonction de la forme :*

$$t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi) \quad ou \quad t \longmapsto A\sin(\omega t + \varphi)$$

avec A, ω et φ réels.

Propriété 25 *Toute fonction sinusoïdale peut s'écrire sous la forme :*

$$t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $A \geqslant 0$ et $\omega \geqslant 0$. Dans cette écriture, A est unique. De plus, si A est non-nul, alors ω est unique. Si A et ω sont non-nuls, alors φ est unique à un multiple de 2π près.

Définition 26 *Pour une fonction sinusoïdale $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A \geqslant 0$, $\omega \geqslant 0$ et $\varphi \in \mathbf{R}$, A est appelée* amplitude*, ω est appelée* pulsation *et φ est appelée* phase.

Propriété 27 *Les fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega \in \mathbf{R}$ sont exactement les fonctions de la forme :*

$$t \longmapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Exercice 28 Soit $\omega \in \mathbf{R}$. Mettre sous la forme donnée par le théorème précédent les quantités suivantes :

$$A(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)\ ; \qquad B(t) = 3\cos(\omega t) - 3\sqrt{3}\sin(\omega t).$$

Propriété 29 *L'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω est stable par combinaison linéaire et contient la fonction nulle.*

Un tel ensemble est ce que l'on appelle un *espace vectoriel.*

Propriété 30 *Si f est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, alors*

$$f'' + \omega^2 f = 0.$$

Nous montrerons en approfondissement que les fonctions sinusoïdales de pulsation ω sont en fait les seules solutions de cette équation différentielle.

Remarque 31 La somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsation différentes n'est, en toute généralité, pas une fonction sinusoïdale.

L'*analyse harmonique* est la branche des mathématiques qui consiste à étudier les signaux périodiques comme étant des sommes de fonctions sinusoïdales de périodes différentes. De nombreux théorèmes donnent des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de telles décompositions. Le *spectre* d'un signal est l'ensemble des pulsations des sinusoïdales dont il est la somme.

4 Fonctions circulaires réciproques

Propriété 32 *Pour tout $y \in [-1,1]$, l'équation $\cos(x) = y$ admet une unique solution dans $[0,\pi]$.*

Pour tout $y \in [-1,1]$, l'équation $\sin(x) = y$ admet une unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Définition 33 *On définit les fonctions :*

$$\operatorname{arccos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \ ; \qquad \operatorname{arcsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

comme étant les réciproques de $\cos$ *et de* $\sin$ *sur les intervalles considérés.*

Ces fonctions sont appelées arc cosinus *et* arc sinus*. Elles peuvent également être notées* $\cos^{-1}$ *et* $\sin^{-1}$*, ou* acos *et* asin *(dans un contexte anglo-saxon).*

FIGURE 2 – À gauche : courbes représentatives des fonctions sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (en violet) et arc sinus (en vert). À droite : courbes représentatives des fonctions cosinus sur $[0,\pi]$ (en bleu) et arc cosinus (en orange).

Remarque 34 Attention : pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$, mais il n'est pas vrai que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$.

Exercice 35 Déterminer l'ensemble des réels θ tels que $\sin(\theta) = \frac{1}{4}$.

Exercice 36 Déterminer l'ensemble des réels θ tels que $\cos(\theta)\sin(\theta) \geqslant -\frac{1}{3}$.

Propriété 37 *La fonction* arccos *est décroissante sur* $[-1,1]$.

La fonction arcsin *est croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 38 Pour $x \in]-1,1[$, déterminer la valeur de $\cos(\arcsin(x))$ et de $\sin(\arccos(x))$.

Exercice 39 On admet que arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$. Calculer la valeur de leur dérivée.

En déduire la valeur de $\arcsin(x) + \arccos(x)$ pour $x \in [-1,1]$.

5 Approfondissement : fonctions tangente et arc tangente

5.1 Propriétés géométriques

Définition 40 *Soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. On appelle* tangente de *θ, et on note $\tan\theta$, la quantité $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.*

Propriété 41 (valeurs remarquables)

- $\tan 0 = \dots$;
- $\tan\frac{\pi}{6} = \dots$;
- $\tan\frac{\pi}{4} = \dots$;
- $\tan\frac{\pi}{3} = \dots$.

Propriété 42 *Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a :*

- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$;
- $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$.

Et si de plus pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\theta \neq k\pi$, on a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Exercice 43 (formule d'addition) Soient a et b deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont définis. Démontrer que :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad ; \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$$

Exercice 44 (tangente de l'angle moitié) Soit θ un réel tel que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\theta \neq (2k+1)\pi$. On pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$. Démontrer que l'on a (sous réserve que le quotient soit défini pour la troisième formule) :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 45 Que représente l'ensemble suivant ?

$$E = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} ; \frac{2t}{1+t^2} \right) \ : \ t \in \mathbf{R} \right\}$$

5.2 Propriétés analytiques

Définition 46 *On appelle* fonction tangente, *notée* tan, *la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} \tan : \mathbf{R}\backslash\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}+\pi\mathbf{Z}\right) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}. \end{array}$$

En d'autres termes, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, cette fonction étant définie partout où cos est non-nulle. Son ensemble de définition est donc la réunion des intervalles de la forme $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

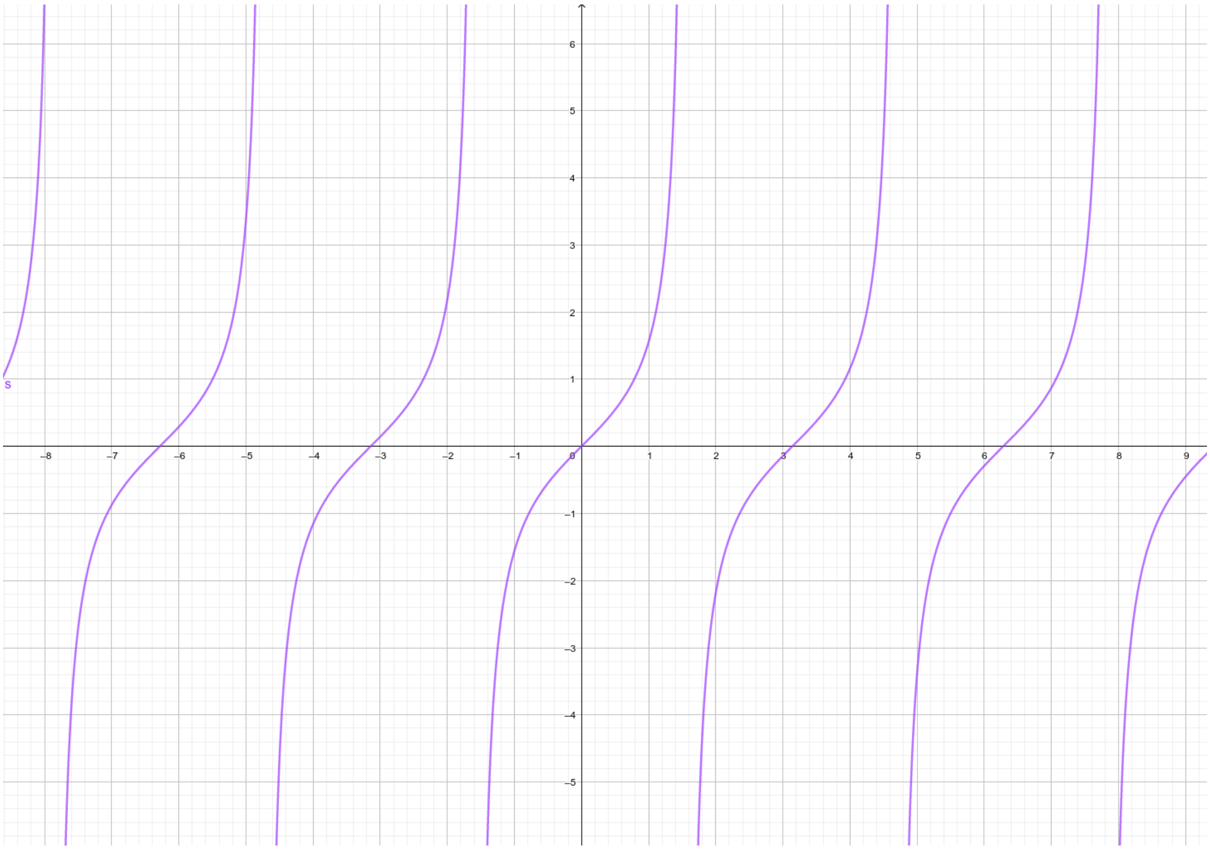

Figure 3 – Courbe représentative de la fonction tangente.

Propriété 47 *La fonction* tan *est impaire et π-périodique.*

Propriété 48 *Sur chaque intervalle de la forme $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction tangente est continue, strictement croissante, et dérivable. Sa dérivée vérifie,*
pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}+\pi\mathbf{Z}\right)$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(\theta).$$

Propriété 49 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ *;* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

On en déduit l'ensemble des limites de la fonction tangente par π-périodicité.

5.3 Réciproque (HP)

Théorème 50 *La fonction* tan *définit une bijection de l'ensemble* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbf{R}$.

Définition 51 *On appelle* fonction arc tangente, *et on note* arctan *ou* $\tan^{-1}$ *la bijection réciproque de* tan *définie de* $\mathbf{R}$ *sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

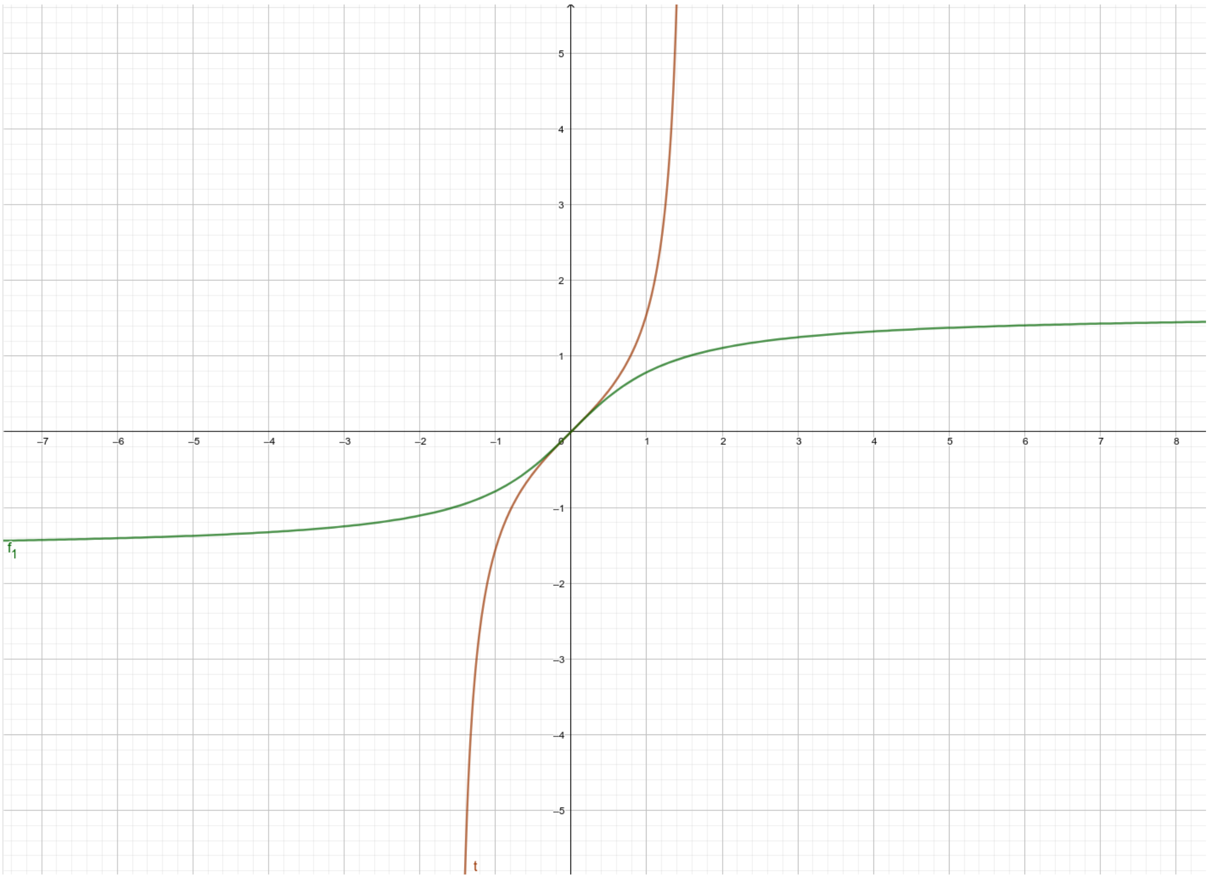

FIGURE 4 – Courbes représentatives des fonctions tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (en marron) et arc tangente (en vert).

Propriété 52 *La fonction arc tangente est dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et sa dérivée est la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Remarque 53 Cette dernière propriété fait que la fonction arc tangente intervient fréquemment dans la recherche de primitives.

Les acquis de ce chapitre

Démonstrations exigibles : néant.

Savoirs et savoirs-faire indispensables.

1. Sinus et cosinus des angles remarquables, des arcs associés.
2. Formules d'addition ($\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, etc.).
3. Cas d'égalité des sinus et cosinus, résolution d'équations et d'inéquations en conséquence.
4. Périodicité et (im)parité des fonctions circulaires.
5. Variations, dérivée, continuité et convexité des fonctions circulaires.
6. Expressions des fonctions sinusoïdales avec phase ou comme combinaison linéaire de sinus et cosinus, équation différentielle associée.
7. Utilisation des fonctions arcsin et arccos pour résoudre des équations et inéquations.

Démonstrations qu'il faut avoir comprises :

— Formules d'addition des fonctions circulaires.

— Calcul de la dérivée de sin et cos.

Principaux approfondissements.

1. Transformation de sommes de sinus et cosinus en produit, et vice-versa.
2. Dérivée des fonctions circulaires réciproques.
3. Propriétés de la fonction tangente.
4. Expression des fonctions circulaires et tangente à partir de la tangente de l'angle moitié.
5. Dérivée de la fonction arc tangente.