Approfondissement de cours C8 : déterminants, produits vectoriels

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

12 mars 2021

Pour l'ensemble du problème, on fixe une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, que l'on appelle « base canonique ».

1 Définition algébrique du déterminant et premières propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On note x_u, y_u, z_u, etc. leurs coordonnées dans la base canonique.

On appelle *déterminant de la famille* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *dans la base canonique* la quantité :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_u y_v z_w + y_u z_v x_w + z_u x_v y_w - x_u z_v y_w - y_u x_v z_w - z_u y_v x_w.$$

On peut également utiliser la notation suivante :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

En l'absence de confusion, on parle tout simplement de *déterminant* de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. Calculer le déterminant de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans la base canonique, puis le déterminant de $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$.

2. Démontrer que le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ et pour tout réel λ, on a :

— $\det(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{t}, \vec{v}, \vec{w})$;

— $\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{u}, \vec{t}, \vec{w})$;

— $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{t}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$;

— $\det(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

3. Démontrer que le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est nul lorsque $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = \vec{w}$ ou $\vec{v} = \vec{w}$.

4. Démontrer qu'inverser deux des paramètres du déterminant revient à changer son signe, mais que faire une permutation circulaire des paramètres ne change pas sa valeur.

5. Démontrer que si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace. *On ne demande pas de prouver la réciproque pour le moment.*

2 Définition algébrique du produit vectoriel et premières propriétés

1. On se donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Trouver, en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et de celles de $\vec{v}$, un vecteur $\vec{k}$ tel que pour tout vecteur $\vec{w}$, on ait : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{k} \cdot \vec{w}$.

2. Démontrer que ce vecteur k est unique.
On appelle $\vec{k}$ le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et on le note $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

3. Démontrer que le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

4. Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

5. Démontrer que le produit vectoriel est antisymétrique, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

3 Définition géométrique du produit vectoriel et conséquences

1. On se donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2$. En déduire que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.

2. En déduire que lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ peut être défini comme l'unique vecteur vérifiant les trois conditions suivantes simultanément :

— $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

— $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;

— $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \geqslant 0$.

3. En déduire que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est, au signe près, le volume du parallélépipède construit le long des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. *On se souviendra que le volume d'un tel parallélépipède est égale au produit de l'aire d'une base et de la hauteur correspondante.*

4. Justifier que trois vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non-nul.

On classe donc les bases en deux catégories : celles dont le déterminant est strictement positif sont dites directes*, et celles dont le déterminant est strictement négatif sont dites* indirectes*.*

4 Déterminants et matrices

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ une matrice carrée d'ordre 3. On appelle *déterminant de M*, et on note $\det M$, la valeur :

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le des trois vecteurs dont les coordonnées sont, dans la base canonique, les coefficients de chaque colonnes de cette matrice.

Dans la suite du problème, on acceptera d'identifier un vecteur avec la matrice d'ordre 3×1 de ses coordonnées. On confondra donc par exemple le vecteur $\vec{i}$ avec la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Soient M et N deux matrices carrées d'ordre 3. On appelle C_1, C_2 et C_3 les trois vecteurs-colonnes de M. Donner l'expression des vecteurs-colonnes de $M \times N$ en fonction de C_1, C_2, C_3 et des coefficients de N.

2. En déduire que $\det(M \times N) = \det M \times \det N$.

3. En déduire que si une matrice est inversible, alors son déterminant est non-nul.

4. Justifier que deux matrices semblables ont le même déterminant.

On rappelle le résultat de cours (admis) suivant : *si trois vecteurs de l'espace forment une base, alors tout vecteur peut être décomposé dans cette base de façon unique.*

5. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de l'espace. On appelle M la matrice composée de ses coordonnées. En introduisant les coordonnées de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, démontrer que M est inversible.

6. En déduire qu'une matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est non-nul.

5 Déterminants et systèmes linéaires

On considère le système d'équations linéaires à trois inconnues x, y, z suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z & = & b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z & = & b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z & = & b_3. \end{array} \right.$$

On rappelle que ce système peut s'exprimer sous une forme matricielle : $AX = B$, avec X matrice inconnue.

On appelle C_1, C_2 et C_3 les vecteurs de la matrice A.

On définit A_1 la matrice dont les colonnes sont (B, C_2, C_3), A_2 la matrice dont les colonnes sont (C_1, B, C_3) et B_3 la matrice dont les colonnes sont (C_1, C_2, B).

On appelle enfin $P_{k,j}$ la matrice obtenue en remplaçant la k-ième colonne de A par C_j, c'est-à-dire que $P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,3} = A$, $P_{1,2}$ est la matrice dont les colonnes sont (C_2, C_2, C_3), etc.

On suppose que A est inversible. Il existe donc une solution au système d'équation. On appelle (x, y, z) une telle solution.

1. Exprimer B comme une combinaison linéaire de C_1, C_2 et C_3.

2. Déterminer le déterminant de A_k en fonction de x, y, z et des déterminants des $P_{k,j}$.

3. En déduire les valeurs de x, y et z en fonction des déterminants de A, A_1, A_2 et A_3.

On appelle cette expression la « règle de Cramer ». Elle est généralisable aux ordres supérieurs.