Dérivation, convexité et récurrence (approfondissement de cours)

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

À rendre pour le 8 mars 2021

Les trois problèmes de ce DM sont indépendants.

Le problème 1 ainsi que le problème 2 jusqu'à la question 3 incluse sont obligatoires. La suite est facultative.

Ce DM est à rédiger individuellement, mais il est recommandé de travailler en groupe et de ne pas hésiter à échanger sur ses difficultés pour les surmonter.

Problème 1 : inégalité de Jensen

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$. On appelle *combinaison linéaire convexe* de $x_1, \ldots, x_n$ une somme de la forme :

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des réels de l'intervalle $[0, 1]$, tels que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels appartenant à I. Pour tous $t_1, \ldots, t_n$ appartenant à $[0, 1]$ tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$,*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle $\mathscr{H}_n$ la proposition « le théorème est vrai au rang n ».

1. Expliquer pourquoi la proposition $\mathscr{H}_1$ est vraie.

2. Expliquer pourquoi la proposition $\mathscr{H}_2$ est vraie.

3. Démontrer que la proposition $\mathscr{H}_3$ est vraie. On pourra remarquer que si $t_1+t_2+t_3 = 1$, alors en posant $T = t_1 + t_2$, $T + t_3 = 1$.

3. Démontrer que la propriété $\mathscr{H}_n$ est héréditaire.
On pourra écrire :

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = T\left(\frac{t_1}{T}x_1 + \cdots + \frac{t_n}{T}x_n\right) + t_{n+1}x_{n+1}$$

où $T = t_1 + \cdots + t_n$.

4. Conclure.

Problème 2 : les dérivées s'annulent à tout ordre

On définit pour la suite du problème une fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1, \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Donner la valeur de $\varphi^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Justifier sommairement.

2. Exprimer les valeurs de $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

3. On définit la proposition :

$\mathscr{I}_n$: il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right).$$

a) Justifier que $\mathscr{I}_0$, $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ sont vraies, et donner les expressions des polynômes P_0, P_1 et P_2.

b) Soit $k \in \mathbf{N}$ et $\psi_k : x \mapsto (1-x^2)^{2^k}$. Calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $\psi_k'(x)$.

c) On suppose que $\mathscr{I}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que $\mathscr{I}_{n+1}$ est vraie. Pour cela, on calculera la dérivée de $\varphi^{(n)}$, et on donnera la valeur de P_{n+1} en fonction de P_n.

On pourra utiliser librement que la somme de deux polynômes est un polynôme, que le produit de deux polynômes est un polynôme, que toute puissance d'un polynôme est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme.

d) Conclure.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. On souhaite désormais étudier les limites de $\varphi^{(n)}$ en $+1$ et en -1.

a) Donner les limites de $\varphi^{(n)}$ en -1^- et en $+1^+$.

b) Justifier que P_n admet des limites finies en $+1$ et -1.

On pose :

$$\chi_n : x \longmapsto \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right).$$

b) En effectuant le changement de variable $y = \frac{1}{1-x^2}$, démontrer χ_n a une limite nulle en $+1^-$ et -1^+.

c) Conclure en donnant la limite de $\varphi^{(n)}$ en $+1$ et -1.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. On souhaite démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\mathscr{I}_n : \quad \varphi \text{ est dérivable } n \text{ fois en 1, et } \varphi^{(n)}(1) = 0.$$

a) Expliquer pourquoi $\mathscr{I}_n$ est initialisée en 0.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose désormais que $\mathscr{I}_n$ est vraie.
On appelle $t_n(x)$ le taux de variation de $\varphi^{(n)}$ entre $+1$ et x.

b) Calculer $t_n(x)$ pour $x > 1$. En déduire la valeur de

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} t_n(x)$$

c) *(Difficile.)* Écrire la valeur de $t_n(x)$ pour $x \in]-1,1[$ en fonction de P_n, puis calculer :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} t_n(x)$$

d) Conclure.

5. De la même façon, démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, φ est dérivable n fois en -1 et $\varphi^{(n)}(-1) = 0$.

6. Un mathématicien émet l'affirmation suivante :

Affirmation 2 *Si f est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, et s'il existe un $x_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(x_0) = 0$, alors f est la fonction nulle.*

a) Ce mathématicien a-t-il raison ? Pourquoi ?

b) *(Pour les élèves suivant l'option mathématiques expertes seulement.)* L'assertion est-elle vraie si l'on suppose de plus que f est un polynôme ?

Problème 3 : caractérisation de la convexité par les tangentes

Démontrer le **lemme 57** du cours :

> **Lemme 57** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Si pour tout $x_0 \in I$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en x_0, alors f est convexe sur I.*

On pourra utiliser librement tous les résultats du cours démontrés <u>avant</u> le lemme 57.