Sommes et dérivées multiples : la formule de Taylor pour les polynômes
(approfondissement de cours)

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

5 février 2021

L'objectif de cet approfondissement est de s'entraîner à la maîtrise de la récurrence et à la manipulation de sommes.

Nous avons vu, lors du cours sur la dérivation, que si f était dérivable en $a \in \mathbf{R}$, alors il existait une fonction R_1, de limite nulle en 0, telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1(x)(x-a).$$

Il a été affirmé, sans démonstration, que si f était dérivable n fois, alors il existe une fonction R_n de limite nulle en a telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)(x-a)^n$$

Ce résultat est connu sous le nom de *formule de Taylor-Young*. Plusieurs théorèmes précisent la nature de ce reste $R_n(x)$.

La démonstration de cette formule ne nous est pas accessible à ce stade, puisqu'elle repose notamment sur la pratique de l'intégration par partie [1]. Nous pouvons toutefois la démontrer, avec nos outils, dans un cadre très particulier : celui où f est une fonction polynomiale. Lorsque n est égal au degré du polynôme, alors la formule est *exacte* : le reste R_n est identiquement nul.

1. Rappeler la formule de Pascal. En déduire, par récurrence, la formule du binôme de Newton : pour tous réels a et b,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On appelle f_n la fonction $x \mapsto x^n$. Par récurrence (sur n ou sur k, au choix), démontrer que la dérivée k-ième de f_n vérifie, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} f_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on appelle :

1. Qui sera traitée parmi les derniers chapitres de l'année.

$\mathscr{H}_n$: pour toute fonction polynomiale P de degré au plus égal à n, pour tout $a \in \mathbf{R}$, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(x - x_0)^k.$$

3. Démontrer que $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont vraies.

4. Dans cette question, on suppose que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$. On appelle P un polynôme de degré $n+1$, et l'on fixe $x_0 \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.

a) On écrit $P(x) = ax^{n+1} + Q(x)$, où Q est un polynôme de degré au plus n. Démontrer que :

$$Q^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0) - a\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x_0^{n+1-k}.$$

b) En déduire que :

$$P(x) = ax^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - a\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} x_0^{n+1-k}(x - x_0)^k.$$

c) En déduire que :

$$P(x) = a(x - x_0)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

On pourra ajouter et soustraire un terme $a(x - x_0)^{n+1}$, et utiliser la formule du binôme de Newton.

5. Conclure.