Approfondissement du cours sur les limites : vers les approximations de fonctions

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

18 décembre 2020

L'objectif de ce problème est de faire travailler sur divers concepts directement liés à la notion de limite, qui sont très utiles pour définir rigoureusement l'idée d'approximation en mathématiques et en sciences. On réutilise notamment la notion de voisinages.

Lorsqu'une propriété doit être démontrée valable au voisinage d'un point a ou de $\pm\infty$, l'on pourra se contenter de rédiger la preuve dans un cas seulement, et se convaincre au brouillon de la validité dans le cas général.

Soit $a \in \bar{\mathbf{R}}$. On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a, sauf éventuellement en a, et l'on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a [1]. On dit alors que :

— f est *dominée* par g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a, ou dit autrement, s'il existe un voisinage V de a et un réel M tels que pour tout $x \in V$, on ait : $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M$. On note :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$$

— f est *négligeable devant* g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a. On note :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$$

— f est *équivalente* à g au voisinage de a si la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a. On note :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Nota : pour les deux premières définitions, il est d'usage de ne considérére que des fonctions g qui soient *positives.*

Partie I : premiers exemples

1. Montrer que $\sin(x) \underset{x \to \infty}{=} \mathrm{O}(x)$ et $x \underset{x \to \infty}{=} \mathrm{O}(x^2)$.

2. Montrer que $x \underset{x \to \infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$ et $x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$.

3. Montrer que

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^3 - 7x^2 + 8x - 11} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{1}{3x} \; ; \qquad \frac{7e^{42x} - 8\sqrt{x}e^{11x} + 5x^2 + \frac{1}{x}}{8e^{43x} - 17x^3 e^x - 11} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{7}{8} e^{-x}$$

1. C'est-à-dire : qu'il existe un voisinage V de a tel que g ne s'annule pas sur V.

4. Démontrer que si f et g ont une limite en a et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors leur limite est égale. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie si l'on suppose en plus que les deux fonctions admettent une même limite *finie* ?

Partie II : quelques règles de compatibilité

1. On considère désormais trois fonctions f, g et h définies au voisinage de a, avec g et h non nulles au voisinage de a.

Indiquer si chacune des propriétés suivantes est vraie ou fausse. Si elle est vraie, le démontrer. Si elle est fausse, exhiber un contre-exemple.

a) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

b) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(h(x))$.

c) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

d) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

e) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

2. Indiquer si chacune des propriétés suivantes est vraie (la démontrer) ou fausse (exhiber un contre-exemple). Énoncer la réciproque, et démontrer de même si elle est vraie ou fausse.

a) On suppose de plus que f est non-nulle au voisinage de a. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $(f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x)))$.

b) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$.

3. Peut-on avoir simultanément :

— $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(f(x))$?

— $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x))$?

— $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x))$?

Si oui, donner un exemple. Si non, le démontrer.

Partie III : opérations

On considère quatre fonctions f, g, h et i, toutes définies au voisinage de a. k désigen une constante <u>non-nulle</u>. Démontrer tout ou partie des résultats suivants :

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors $kf(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $|f(x)| \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $kf(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $|f(x)| \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} i(x)$, alors

— $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) + i(x)$

— $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)i(x)$

— $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g(x)}{i(x)}$

4. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$, alors $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$.
5. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.
6. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(i(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x)i(x))$.
7. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(i(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)i(x))$ (il n'y a pas de faute de frappe à cette question, c'est bien un grand O puis deux petits o).
8. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) + h(x) = \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
9. Si $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(f(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x) + g(x)$.
10. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors il existe h négligeable devant g tel que $f(x) = g(x) + h(x)$.
11. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x) + h(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.
12. Etc. [2]

En cas de motivation suffisante, essayer d'écrire et démontrer les propriétés des composées.

Partie IV : quelques exemples

Au vu des dernières propriétés, on peut s'autoriser à écrire, par exemple :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x))$$

pour dire : il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que $f = g + h$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

De même, on peut écrire : $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{O}(g(x))$.

On peut alors par exemple effectuer le genre de manipulations suivantes : supposons qu'il a été précédemment démontré [3] que $\sin(x) \underset{x\to a}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ et $\cos(x) \underset{x\to a}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &\underset{x\to a}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^5)\right) \\
&\underset{x\to a}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \mathrm{o}(x^6) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{144} + \mathrm{o}(x^8) + \mathrm{o}(x^4) + \mathrm{o}(x^6) + \mathrm{o}(x^8) + \mathrm{o}(x^9) \\
&\underset{x\to a}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne provient du fait que tous les termes de degré supérieur ou égal à x^5 sont négligeables devant x^4, et donc *a fortiori* devant (x^4). En réalité, on aurait donc pu se passer d'écrire le terme en x^4 dans la deuxième parenthèse, car son développement n'a donné que des termes négligeables.

Proposer de nouvelles rédactions pour les exercices « travailler les automatismes » du livre en utilisant le symbole $\sim$ ou/et le symbole o (on pourra tenter de rédiger quatre questions, de natures variées, du livre).

2. Ne pas hésiter à en trouver d'autres du même genre, ni à se convaincre avec des exemples.
3. C'est vrai, et nous pourrons le démontrer à la fin de l'année scolaire

Partie V : définition équivalente

La définition vue en partie I pour les trois concepts étudiés présente un inconvénient : elle fait intervenir g au dénominateur, et suppose donc de supposer que g est non-nulle au voisinage de a.

1. On propose les trois nouvelles définitions suivantes :

— f est *dominée* par g au voisinage de a s'il existe un réel M et un voisinage V tel que pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$.

— f est *négligeable devant* g au voisinage de a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de a tel que pour tout $x \in V_\varepsilon$, on ait $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$.

— f est *équivalente* à g au voisinage de a si $f - g$ est négligeable devant g.

Démontrer qu'elles sont équivalentes aux trois définitions de la partie I dans le cas où g ne s'annule pas sur un voisinage de a.

2. Avec ces nouvelles définitions, que signifie être équivalent à / dominée par / négligeable devant une fonction g qui est constamment nulle au voisinage de a ? Ou qui, quel que soit le voisinage de a considéré, s'annule sur un point de ce voisinage ?

Partie VI : et les suites ?

Proposer une adaptation des notions de $\sim$, o et O pour les suites.

Partie VII conclusive : à quoi ça sert ?

Un usage essentiel de ces outils est d'écrire certaines fonctions comme étant, au voisinage d'un point, approximées par des *développements* sous la forme de fonctions plus simple. En particulier, lorsque la fonction approximante est un polynôme et que le développement se fait en un point, on parle de *développement limité*.

À titre d'exemple, on a vu en cours que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Autrement dit,

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

On peut donc en déduire que :

$$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$$

Dit autrement,

$$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x + \mathrm{o}(x)$$

On peut en réalité aller plus loin, et démontrer [4] que l'on a en fait :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)$$

et même que pour tout x, la suite dont le n-ième terme est $1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour limite e^x.

4. Ce sera possible en fin d'année quand nous aurons vu la théorie des intégrales, et en particulier la technique de l'intégration par parties.

Des résultats similaires peuvent être obtenus pour de nombreuses autres fonctions, par exemple :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

Une fois cela fait, le calcul de limites plus complexes est grandement facilité. On peut notamment traiter de nombreux types de formes indéterminées. Outre le fait que l'on peut désigner rigoureusement l'idée selon laquelle « le terme dominant l'emporte » sans avoir à écrire les fastidieuses factorisations, on peut également gagner en puissance de calcul sur des exemples plus complexes. On peut ainsi calculer des limites plus difficiles, telles que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)} \; ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Une petite beauté mathématique, un peu technique à démontrer mais dont nous pourrons proposer une preuve presque complète en approfondissement en fin d'année [5] est la *formule de Stirling* :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Plus généralement, cette idée d'approcher une fonction par des polynômes de degré arbitrairement grand ouvre la voie vers une branche importante des mathématiques que l'on appelle la théorie des séries entières (niveau L2). On peut, par ce biais, faire des liens puissants entre des objets très différents, par exemple des problèmes fondamentaux d'arithmétique (niveau L3 voire M1 et au-dessus).

5. Après avoir étudié les intégrales.