Approfondissement de cours C10 : résolution de l'équation de l'oscillateur harmonique

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

30 mars 2021

L'équation de l'oscillateur harmonique intervient fréquemment en physique. Elle permet de modéliser l'ensemble des mouvements périodiques simples en négligeant l'amortissement : équations des pendules ou des ressorts, par exemple.

Théorème 1 *Soit $\omega_0 \in \mathbf{R}^*$. L'équation différentielle*

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \tag{E}$$

a, pour ensemble de solutions sur $\mathbf{R}$, l'ensemble des fonctions sinusoïdales de pulsation ω_0, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathscr{H} = \{t \mapsto A\cos(\omega_0 t + \varphi) \ : \ A \in \mathbf{R}, \varphi \in \mathbf{R}\}.$$

On fixe ω_0 dans toute la suite du document.

1 Partie préliminaire

Les questions suivantes peuvent être traitées dans le désordre.

On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. Il s'agit donc de démontrer que $\mathscr{S} = \mathscr{H}$.

1. Justifier que $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}$, c'est-à-dire que toutes les fonctions de $\mathscr{H}$ sont des solutions de l'équation $y'' + \omega_0^2 y = 0$.
2. Soit a une fonction continue et A une primitive de a. Démontrer que les solutions de l'équation $y' + a(t)y = 0$ sont exactement les fonctions $t \longmapsto Ce^{-A(t)}$. On pourra rechercher les solutions sous la forme $y(t) = z(t)e^{-A(t)}$ où z est une fonction inconnue.
3. Justifier que $\mathscr{H} = \{t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \ : A, B \in \mathbf{R}\}$.

On souhaite désormais montrer qu'il n'y a pas d'autre solution à (E) que les fonctions sinusoïdales, c'est-à-dire que $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{H}$. On propose ci-après deux méthodes, l'une un peu laborieuse, l'autre plus simple mais requérant les outils du programme de mathématiques expertes (nombres complexes). Les deux reposent sur la même idée : réaliser un changement de fonction pour se ramener à une équation différentielle du premier ordre.

2 Méthode élémentaire mais laborieuse

Soit f une solution de l'équation, c'est-à-dire que $f \in \mathscr{S}$. Nous allons démontrer que $f \in \mathscr{H}$.

Sachant que $t \longmapsto \cos(\omega_0 t)$ est solution, nous allons chercher à écrire $f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t)$ et en déduire g. Cependant, cela n'est possible qu'à condition que le cosinus soit non nul. Nous devons donc travailler sur des intervalles sur lesquels le cosinus ne s'annule pas, et espérer « recoller » les solutions ainsi trouvées.

On pose pour la suite, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$I_k = \left]\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega_0}\ ;\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega_0}\right[.$$

2.1 Résolution sur un intervalle I_k.

1. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Justifier qu'il existe une fonction $g_k : I_k \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que pour tout $t \in I_k$, $f(t) = g_k(t)\cos(\omega_0 t)$.
2. Exprimer la quantité $f'' + \omega_0^2 f$ en fonction de g_k' et g_k''.
3. En déduire que la fonction g_k' est solution de l'équation différentielle sur I_k :
$$y' - 2\omega_0 \tan(\omega_0 t) y = 0 \tag{E_0}$$
où $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.
4. Démontrer que les solutions de l'équation (E_0) forment exactement l'ensemble :
$$\mathscr{T} = \left\{ t \longmapsto \frac{K}{\cos^2(\omega_0 t)}\ :\ K \in \mathbf{R} \right\}.$$
5. Calculer la dérivée de la fonction tan, puis montrer que g_k est nécessairement une fonction de la forme
$$g_k : t \longmapsto A_k \tan(\omega_0 t) + B_k$$
avec A_k et B_k des réels.
6. En déduire enfin que sur l'intervalle I_k, f a pour expression :
$$t \longmapsto A_k \sin(\omega_0 t) + B_k \cos(\omega_0 t).$$

2.2 Recollement.

On écrit pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $x_k = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega_0}$. On a alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $I_k =]x_k, x_{k+1}[$.

1. Exprimer $\lim\limits_{x \to x_k^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_{k+1}^-} f(x)$ en fonction de A_k et de la parité de k.
2. Exprimer de même $\lim\limits_{x \to x_k^+} f'(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_{k+1}^-} f'(x)$ en fonction de B_k et de la parité de k.
3. Démontrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $A_k = A_{k+1}$ et que $B_k = B_{k+1}$, puis conclure que $\mathscr{S} \subseteq H$.

3 Méthode plus simple mais nécessitant les nombres complexes (maths expertes)

On suppose que le comportement des dérivées (linéarité, produit, etc.) reste valable pour des fonctions à valeur dans $\mathbf{C}$. On suppose que le théorème selon lequel les seules fonctions à dérivée nulle sont les constantes reste vrai pour les fonctions à valeur dans $\mathbf{C}$.

Soit f un élément de $\mathscr{S}$.

1. Déterminer une fonction g (à valeurs complexes) définie sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = g(t)e^{-\omega_0 it}$.
2. Exprimer $f'' + \omega_0^2 f$ en fonction de g' et g''. En déduire que g' vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (complexes).
3. En admettant que le résultat démontré à la question 2 de la partie 1 reste vrai dans le cas de coefficients complexes, démontrer que g' est nécessairement une fonction de la forme $t \mapsto Ke^{\omega_0 it}$, avec $K \in \mathbf{C}$.
4. En déduire que f peut s'écrire $t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, avec $A, B \in \mathbf{C}$.
5. Démontrer que A et B appartiennent en fait à $\mathbf{R}$, puis conclure.

4 Oscillateur amorti (maths expertes)

En se fondant sur la méthode précédente, on peut en fait étendre le résultat au cas où l'équation est un peu modifiée pour inclure un terme d'ordre 1, et où éventuellement le coefficient devant le terme d'ordre 0 est négatif.

Théorème 2 *Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation différentielle :*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{F}$$

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$. Les solutions de (F) forment l'ensemble $\mathscr{S}$, défini par :

1. *Si P possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :*
$$\mathscr{S} = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \ : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \ ;$$
2. *Si P possède une racine réelle double r :*
$$\mathscr{S} = \{t \mapsto (A + Bt)e^{rt} \ : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \ ;$$
3. *Si P possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:*
$$\mathscr{S} = \{t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \ : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

À noter qu'en sciences physiques, on présente généralement les équations sous la forme $y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0$, où $Q \in \mathbf{R}_+^*$ est appelé *facteur de qualité* du système et $\omega_0 \in \mathbf{R}$

sa *pulsation propre*. Les trois expressions de $\mathscr{S}$ correspondent respectivement à $Q < \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{2}$ et $Q > \frac{1}{2}$.

Quoi qu'il en soit dans la suite, on appelle r_1 et r_2 les deux racines de P, réelles ou complexes, et éventuellement confondues. On cherche les solutions à valeurs réelles uniquement.

1. Soit f une quelconque fonction deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. Justifier qu'il existe une fonction g à valeurs <u>complexes</u> telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = g(t)e^{r_1 t}$.
2. Démontrer que f est solution de (F) si et seulement si g est solution de
$$z'' + (r_1 - r_2)z' = 0. \tag{F_0}$$
3. Pour cette question uniquement, on suppose $r_1 = r_2$. Démontrer que g est une fonction affine à coefficients complexes, puis conclure en justifiant que ces coefficients sont réels.
4. Dans le cas où $r_1 \neq r_2$, démontrer que g est solution de (F_0) si et seulement s'il existe des complexes A et B tels que $g : t \longmapsto Ae^{(r_2 - r_1)t} + B$. On admettra que le comportement des exponentielles complexes vis-à-vis de la dérivation est similaire à celui des exponentielles réelles.
5. Conclure en conséquence dans le cas où $r_1 \neq r_2$ sont des nombres réels. On n'omettra pas de justifier que A et B sont des nombres réels.

   On suppose désormais que r_1 et r_2 sont deux nombres complexes conjugués, c'est-à-dire qu'il existe α et β réels tels que $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
6. Justifier alors que g est une fonction de la forme $t \longmapsto Ue^{2\beta i t} + V$ avec $(U, V) \in \mathbf{C}^2$. Puis en déduire la forme de f, en justifiant que les constantes A et B sont réelles, et conclure.