Complément de cours : raisonnements types

Valentin Melot — Terminale spé maths A

30 novembre 2020

Principe : l'un des objectifs cette année est de développer les capacités de raisonnement, afin de rendre la transition avec le supérieur la plus douce possible.

La fiche suivante énonce quelques conseils essentiels pour la rédaction des raisonnements. Elle propose des modalités de rédaction.

La plupart du temps, les questions consistent à enchaîner un ou plusieurs des raisonnements-types suivants. Il est souvent nécessaire de faire, avant, après ou pendant des calculs directs.

1 Raisonnement déductif

Il s'agit du mode le plus simple et le plus fréquent. Le principe est celui qui a été vu depuis le début de collège : on a une propriété de la forme « si P, alors Q ». On énonce la propriété, puis on vérifie que la prémisse P est vraie, et on en déduit que la conclusion Q est vraie.

Rédaction-type

Énoncer la propriété ou la définition : si P, alors Q.

Vérifier que la prémisse P est vérifiée : elle peut provenir de l'énoncé, d'une question précédente, ou d'un raisonnement précédent.

Énoncer la conclusion Q.

Remarque : on peut inverser les deux premières étapes du raisonnement, c'est-à-dire énoncer la propriété ou définition *après* avoir vérifié que la prémisse était vraie.

Exemple : *On se place dans un repère orthonormé* $(O, \vec{x}, \vec{j})$. *Soit* $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(-3,5)$. *Montrer que les points A, B et C sont alignés.*

On effectue les calculs préliminaires :

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{BC} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On effectue deux déductions à la suite :

(Première déduction) S'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{BC} = k.\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

(Deuxième déduction) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Donc les points A, B et C sont alignés.

Remarque : on peut se dispenser de répéter que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires sachant que cela a été montré deux lignes plus haut.

Important : il est essentiel, pour ne pas verser dans le sophisme, d'énoncer l'implication dans le bon sens. Dans l'exemple précédent, la deuxième déduction serait fausse si l'on écrivait « si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ». À ce sujet, voir la fiche sur les conditions nécessaires et suffisantes.

2 Raisonnement par récurrence

C'est un mode de raisonnement qui est fréquent lorsque l'on doit démontrer qu'une propriété qui dépend d'une variable n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Le premier chapitre de cours comporte de nombreux exemples.

Rédaction-type

Énoncer la proposition qui dépend de la variable et la nommer, par exemple sous la forme : P_n désigne la proposition « ... ». Annoncer que l'on va la démontrer par récurrence.

Initialisation : Vérifier que la proposition est initialisée, c'est-à-dire que P_0 est vraie (soit directement, soit *via* un raisonnement déductif).

Hérédité : Démontrer que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire que quel que soit le nombre n choisi, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Dire « par récurrence » et annoncer que la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exemple : *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $4^n + 5$ *est un multiple de 3.*

On note P_n la proposition « $4^n + 5$ est un multiple de 3 ». Démontrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $4^n + 5 = 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$, qui est un multiple de 3. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que P_n est vraie pour un certain n, et montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse, $4^n + 5$ est un multiple de 3, donc il existe un $k \in \mathbf{Z}$ tel que $4^n + 5 = 3k$.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4 \times 4^n + 5 \\ &= 4 \times (4^n + 5) - 4 \times 5 + 5 \\ &= 4 \times 3k - 15 \\ 4^{n+1} + 5 &= 3 \times (4k - 5) \end{aligned}$$

Donc $4^{n+1}+5$ est un multiple de 3, et $\underline{P_{n+1} \text{ est vraie}}$.

Conclusion : la proposition P_n est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Remarque : l'assertion « si P_n est vraie » est appelée l'*hypothèse de récurrence*.

3 Raisonnement par l'absurde

C'est un mode de raisonnement **essentiel** pour démontrer qu'une propriété est fausse ou qu'un objet n'existe pas. Il repose sur l'idée qu'une proposition vraie ne peut pas avoir pour conséquence une proposition que l'on sait fausse.

Rédaction-type

Annoncer que l'on suppose que la propriété P est juste.

Effectuer un raisonnement déductif, sous l'hypothèse que P est juste.

Arriver à une proposition Q que l'on sait fausse (soit parce que c'est une évidence, soit parce que cela contredit un résultat précédent, ou une hypothèse qui a été faite, etc.).

Déclarer que cette dernière proposition Q est impossible.

Déclarer : « par l'absurde, la proposition P est fausse ».

Exemple 1 : *soit* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Démontrer qu'il n'existe pas de réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$.

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$.

Ces réels sont une solution du système : $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha\times 1+\beta\times 0 & = & 0\\ \alpha\times 0+\beta\times 1 & = & 0\\ \alpha\times 1+\beta\times 1 & = & 1\end{array}\right.$.

Ce système s'écrit : $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha & = & 0\\ \beta & = & 0\\ \alpha+\beta & = & 1\end{array}\right.$.

Donc $0=1$, ce qui est impossible.

Par l'absurde, l'hypothèse est fausse. Il n'existe pas de réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$.

Exemple 2 (au programme de seconde) : *on suppose qu'il a été démontré que pour tout nombre entier n, n est pair si et seulement si n^2 est pair. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.*

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il peut s'écrire comme une fraction <u>irréductible</u> $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^*$.

En élevant l'égalité précédente au carré : $2=\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$, d'où $2b^2=a^2$. Donc a^2 est pair. D'après le résultat démontré précédemment, a est pair, donc il existe $a' \in \mathbf{N}$ tel que $a=2a'$.

On a donc : $2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{(2a')^2}{b^2} = \frac{4a'^2}{b^2}$. Donc $b^2 = 2a'^2$. Donc b^2 est pair. D'après le résultat démontré démontré précédemment, b est pair.

a et b étant pairs, la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit la définition de a et b.

Par l'absurde, l'hypothèse est fausse. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

4 Raisonnement par équivalences

Raisonner par équivalences consiste à mener que la propriété que l'on cherche à démontrer équivaut à une autre propriété dont on peut plus facilement déterminer la véracité. Cela revient à effectuer deux raisonnements déductifs en sens contraire en parallèle, ce qui est parfois un peu périlleux.

Rédaction-type

Écrire un enchaînement de propositions équivalentes, en les séparant par les mots de liaison « si et seulement si » (ou leur abréviation « ssi ») : P_0 si et seulement si P_1 ssi P_2 ssi $\ldots$ ssi P_n.

Puis démontrer soit que la dernière proposition P_n est vraie, soit qu'elle est fausse, soit qu'elle est vraie à certaines conditions seulement.

En déduire que la proposition initiale P_0 est vraie, ou qu'elle est fausse, ou qu'elle est vraie à certaines conditions seulement respectivement.

ATTENTION : il est fondamental de ne pas « perdre » une équivalence en cours de route. En particulier, si l'on utilise l'un des mots « donc » ou « alors » au lieu de « si et seulement si », le raisonnement par équivalence est brisé, on n'a plus que des implications.

Exemple 1 : *soit $A(3;1)$, $B(2,-2)$ et $G(2017;a)$ où $a \in \mathbf{R}$. Pour quelles valeurs de a les points A, B et G sont-ils alignés ?*

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG}$.

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{BA} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{BG} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2015 \\ a+2 \end{pmatrix}.$$

A, B et G sont alignés
si et seulement si $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires
si et seulement si $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont un déterminant nul
si et seulement si $(a+2) \times 1 - 2015 \times 3 = 0$
si et seulement si $a = 3 \times 2015 - 2$
si et seulement si $a = 6043$.

L'unique valeur de a pour laquelle A, B et G sont alignés est $a = 6043$.

Exemple 2 (plus difficile) : *soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On suppose qu'il a été démontré dans les questions précédentes que les droites (AB) et (CD) n'étaient pas parallèles. On suppose également qu'il a été démontré que $\overrightarrow{AD} = 3.\overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{AC}$. Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.*

(AB) et (CD) sont des droites sécantes
si et seulement si (AB) et (CD) sont des droites non-parallèles et coplanaires
si et seulement si (AB) et (CD) sont coplanaires (puisqu'on a montré qu'elles n'étaient pas parallèles)
si et seulement si A, B, C et D sont des points coplanaires
si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont des vecteurs coplanaires
si et seulement si [$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires OU il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$]

Or, on sait que $\overrightarrow{AD} = 3.\overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{AC}$. Donc il existe deux réels $\alpha = 3$ et $\beta = 2$ tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha.\overrightarrow{AB} + \beta.\overrightarrow{AC}$. Donc (AB) et (CD) sont des droites sécantes.

5 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse permet de rechercher l'ensemble des solutions à un problème tout en évitant la contrainte de devoir n'avoir que des lignes équivalentes deux à deux lors d'un raisonnement par équivalences successives.

Une première phase d'« analyse » consiste à raisonner par entonnoir : en tirant des déductions des hypothèses du problèmes, on va progressivement faire apparaître des contraintes sur les valeurs recherchées, et restreindre l'ensemble des solutions possibles.

Une fois cette phase terminée, on dispose d'un ensemble de solutions envisageables, qui peut être vide (auquel cas le problème n'a pas de solution) ou non. Si cet ensemble de solutions envisageables n'est pas vide, il faut encore s'assurer qu'il ne contient pas de valeurs parasites qui ne seraient pas des solutions : c'est la synthèse.

Si l'ensemble des solutions envisageables est de petite taille, on peut les vérifier une par une. Il est possible que certaines des solutions envisageables soient en fait fausses, auquel cas il faut les éliminer.

S'il est de grande taille, il faut démontrer, réciproquement que toutes les solutions conviennent par un raisonnement déductif. Cela nécessite d'avoir poussé l'analyse suffisamment loin pour être sûr qu'il n'y a pas de valeurs parasites. Autrement dit, il faut faire la synthèse au brouillon pour être sûr que l'analyse a été menée au bout avant de pouvoir rédiger.

Rédaction-type

Annoncer que l'on raisonne par analyse synthèse pour rechercher les solutions du problème.

<u>Analyse :</u> articuler les hypothèses du problème, pour faire apparaître des contraintes sur les solutions. Puis décrire l'ensemble des solutions envisageables, sous la forme d'une condition nécessaire (« <u>si</u> x est une condition nécessaire, <u>alors</u> x vérifie ... «).

<u>Synthèse :</u> démontrer que tout ou partie de ces solutions envisageables sont <u>effectivement</u> solutions du problème.

<u>Conclusion :</u> conclure que les solutions du problème sont exactement celles qui ont été trouvées.

Exemple 1 : *quels sont les nombres entiers naturels n vérifiant $n(n+1)(2n+1) = 84$?*

On recherche les solutions par analyse-synthèse.
Analyse : Écrivons l'ensemble des diviseurs de 84 :

$$D_{84} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 14; 21; 28; 42; 84\}.$$

Si n est solution du problème, alors n est un diviseur de 84 et $n+1$ est également un diviseur de 84.
Donc si n est solution du problème, alors n ne peut valoir que 1, 2, 3 ou 6.

Synthèse : On vérifie que :

$$\begin{aligned} 1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1) &= 6 \\ 2 \times (2+1) \times (2 \times 2 + 1) &= 30 \\ 3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1) &= 84 \\ 6 \times (6+1) \times (2 \times 6 + 1) &= 546. \end{aligned}$$

Conclusion : l'unique solution du problème est $n = 3$.

Exemple 2 : *résoudre l'équation suivante : $\sqrt{x+2} = x$.*

On recherche les solutions par analyse-synthèse.

Analyse : Soit x une solution de l'équation.
En élevant chaque membre de l'équation au carré, $x + 2 = x^2$, soit $x^2 - x - 2 = 0$.
Cette équation du second degré possède deux solutions évidentes : $x = -1$ et $x = 2$.
Or, une équation du second degré possède au plus deux solutions. Donc $x = -1$ et $x = 2$ sont les seules solutions possibles de cette équation.
Donc si x est solution du problème, alors $x \in \{-1, 2\}$.

Synthèse : On vérifie que :

- $x = -1$ n'est pas une solution de l'équation.
- $x = 2$ est une solution de l'équation.

Conclusion : l'unique solution de cette équation est $x = 2$.

Exemple 3 (difficile, ne serait pas donné en devoir sans questions intermédiaires) : *on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est* paire *si elle vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, et qu'elle est* impaire *si elle vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$.*
Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Montrer par analyse-synthèse qu'il existe une unique fonction paire p et une unique fonction impaire i telles que $f = g + i$.

On cherche à identifier p et i par analyse-synthèse.

Analyse : supposons que p et i sont les fonctions recherchées, définies sur $\mathbf{R}$.
Alors, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = p(x) + i(x) \qquad (1)$$
$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) \qquad (2)$$

En sommant les égalités (1) et (2) : $f(x) + f(-x) = 2p(x)$, donc $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
En soustrayant l'égalité (2) à l'égalité (1) : $f(x) - f(-x) = 2i(x)$, donc $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Donc si p et i sont solutions au problème, alors nécessairement pour tout $x \in \mathbf{R}$, on doit avoir :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Synthèse : vérifions que les fonctions p et i définies par $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ sont solutions au problème. On a :

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $p(x)+i(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$. Donc $f = p+i$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $p(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$. Donc p est paire.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $i(-x) = \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)-f(-x)}{2} = -i(x)$. Donc i est impaire.

Conclusion : il existe une unique fonction paire p et une unique fonction impaire i telles que $f = p + i$. De plus ces fonctions ont pour valeur :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

*
* *

Pour être compris dans ces raisonnements, parfois complexes, il est indispensable de recourir à des connecteurs logiques. Utilisez sans modération les mots suivants : si, donc, alors, car, dès lors que, on sait que, d'après, seulement si, implique, pour tout, il existe, quel que soit, d'une part, d'autre part, en conséquence, d'où, cependant, supposons que, sous l'hypothèse où, montrons que, démontrons que, prouvons que, et, ou, or, si et seulement si, …

Le choix de la présentation peut aussi beaucoup aider à clarifier le raisonnement. N'hésitez pas à souligner les mots qui marquent les étapes de votre raisonnement, ou à encadrer la conclusion de la question. Vous pouvez donner des noms à vos systèmes d'équation, numéroter vos équations lorsque vous résolvez un système par addition ou par substitution, etc.