Complément de cours : rappel des démonstrations exigibles du programme de première

Valentin Melot — Lycée N.-D. de la Providence

12 janvier 2021

Ce document synthétise les démonstrations exigibles du programme de première. Par « exigibles », on entend que tout élève doit être capable, pour chacun des résultats listés ci-après :

— D'une part, d'énoncer le théorème, ou un énoncé mathématiquement équivalent (formulations ou notations différentes) mais parfaitement rigoureux,

— D'autre part, de fournir en toute autonomie une preuve du théorème,

— Et si besoin, d'effectuer les deux tâches précédentes à la suite.

La maîtrise de ces démonstrations est une étape essentielle dans l'apprentissage du raisonnement mathématique. Outre l'effet positif sur les notes à l'épreuve de spécialité du baccalauréat, elle permet de s'accoutumer à des tâches plus complexes que l'application directe du cours.

Les démonstrations proposées ci-dessous ne sont pas uniques. Certaines peuvent être présentées différemment, et en particulier les notations peuvent être adaptées. En cas de doute sur la justesse d'une démonstration alternative, ne pas hésiter à m'interroger directement.

Table des matières

Cinq chapitres ne comportent aucune démonstration exigible.

— En analyse : les chapitres *variations et courbes représentatives de fonctions* et *fonction exponentielle*.

— En géométrie : le chapitre *géométrie repérée*.

— En probabilités et statistiques : l'ensemble des chapitres.

Algèbre

1 Suites numériques

Nota : pour ce chapitre, les démonstrations proposées sont faites par récurrence, et s'appuient donc sur le programme de terminale.

1.1 Terme général d'une suite arithmétique

Théorème 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r. Son terme général s'exprime $u_n = rn + a$.*

Preuve : Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit la proposition $\mathscr{H}_n$: « $u_n = rn + a$ ».

— Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = a = r \times 0 + a$. Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

— Hérédité : supposons que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour un certain n.
Par définition d'une suite arithmétique de raison r, $u_{n+1} = u_n + r$.
Or, d'après $\mathscr{H}_n$, $u_n = rn + a$. Donc $u_{n+1} = (rn + a) + r = r(n + 1) + a$. Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion : par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. ∎

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Théorème 1.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q. Son terme général s'exprime $u_n = a \times q^n$.*

Preuve : Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit la proposition $\mathscr{H}_n$: « $u_n = a \times q^n$ ».

— Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = a = a \times q^0$. Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

— Hérédité : supposons que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour un certain n.
Par définition d'une suite géométrique de raison q, $u_{n+1} = u_n \times q$.
Or, d'après $\mathscr{H}_n$, $u_n = a \times q^n$. Donc $u_{n+1} = a \times q^n \times q = a \times q^{n+1}$. Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion : par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. ∎

1.3 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Théorème 1.3 *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,*

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve : On appelle S_n la somme de l'énoncé.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la proposition $\mathscr{H}_n$: « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

— Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$. Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

— Hérédité : supposons que $\mathscr{H}_n$ est vraie pour un certain n.
On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = S_n + n + 1.$$

Or, d'après $\mathscr{H}_n$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion : par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. ∎

1.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Théorème 1.4 *Pour tout $q \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbf{N}^*$,*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Preuve : On appelle S_n la somme de l'énoncé.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit la proposition $\mathscr{H}_n$: « $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

— Initialisation : pour $n = 0$,
$$S_0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$
Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

— Hérédité : supposons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie pour un certain n.
On a :
$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}.$$
Or, d'après $\mathscr{H}_n$, $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Donc :
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}. \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

— Conclusion : par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. ■

2 Polynômes du second degré

2.1 Expression des racines

Théorème 2.1 *Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ avec $a \neq 0$. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.*

— *Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 vérifiant :*
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— *Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution réelle $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.*

— *Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.*

Preuve : On exprime d'abord le trinôme f sous forme canonique. On remarque que :
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$
Donc
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$
Soit :
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{1}$$
On raisonne par disjonction de cas selon le signe de Δ.

1. Supposons d'abord que $\Delta \geqslant 0$. Alors

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

On en déduit donc la factorisation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

D'après le théorème de l'équation produit nul, $f(x)$ est nulle si et seulement si l'un des deux facteurs $x - x_1$ ou $x - x_2$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si $x = x_1$ ou $x = x_2$. De plus, $x_1 = x_2$ si et seulement si $\sqrt{\Delta} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\Delta = 0$.

2. Supposons au contraire que $\Delta < 0$. Dans l'écriture (1),
   - le terme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif,
   - le terme $\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif,

   donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif quel que soit x, et *a fortiori* ne s'annule jamais. L'équation n'a donc pas de solution. ∎

Analyse

3 Dérivation

3.1 Équation de la tangente en un point à une courbe représentative

Théorème 3.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Si f est dérivable en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente $\mathscr{T}_a$ au point de coordonnées $(a, f(a))$, et une équation de cette tangente est :*

$$\mathscr{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Preuve : On considère le point A_h de coordonnées $(a+h, f(a+h))$, et le point B de coordonnées $(a, f(a))$, qui appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$. Lorsque $h \neq 0$, ces deux points sont distincts. Appelons $\mathscr{S}_h$ la droite (A_hB).

On admet les deux résultats (intuitifs) suivants :

- Si f est dérivable en a, alors lorsque $h \to 0$, les sécantes $\mathscr{S}_h$ (notés $c_{\mathscr{S}_h}$) « tendent vers » $\mathscr{T}_a$ (noté $c_{\mathscr{T}_a}$).

— Si f est dérivable en a, alors les coefficients directeurs des droites $\mathscr{S}_h$ ont pour limite le coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}_a$.

Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{S}_h$ est la quantité :

$$c_{\mathscr{S}_h} = \frac{y_{A_h} - y_B}{x_{A_h} - x_B} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

On reconnaît le taux de variation de f entre a et $a+h$. f étant dérivable en a, ce taux de variation converge, pour $h \to 0$, vers $f'(a)$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{h \to 0} c_{\mathscr{S}_h} = f'(a).$$

Or, d'après le résultat admis, on a aussi :

$$\lim_{h \to 0} c_{\mathscr{S}_h} = c_{\mathscr{T}_a}$$

où $c_{\mathscr{T}_a}$ est le coefficient directeur de $\mathscr{T}_a$.

Donc par unicité de la limite, $c_{\mathscr{T}_a} = f'(a)$.

La droite $\mathscr{T}_a$ admet donc une équation réduite sous la forme :

$$\mathscr{T}_a : y = f'(a)x + \alpha$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$ est à déterminer.

Or, $B \in \mathscr{T}_a$. Donc α vérifie l'égalité suivante :

$$f(a) = f'(a)a + \alpha.$$

On en déduit que :

$$\alpha = f(a) - f'(a)a.$$

Une équation réduite de $\mathscr{T}_a$ est donc :

$$\mathscr{T}_a : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

D'où le résultat. ■

3.2 La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

Théorème 3.2 *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbf{R}_+$, n'est pas dérivable en 0.*

Preuve : Soit $h \in \mathbf{R}_+^*$. Calculons le taux de variation de f entre 0 et $0+h$, que nous appelons $\tau_f(0,h)$. Ce taux de variation est défini par :

$$\tau_f(0,h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Or, $\lim_{h \to 0} \sqrt{h} = 0^+$, donc $\lim_{h \to 0} \tau_f(0,h) = +\infty$. Cette dernière limite n'étant pas réelle, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. ■

3.3 Fonction dérivée de la fonction carrée

Théorème 3.3 *La fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbf{R}_*$, est dérivable sur $\mathbf{R}_*$, et sa fonction dérivée est :*

$$f' : x \mapsto 2x.$$

Preuve : Soit $x \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathbf{R}^*$. Calculons le taux de variation de f entre x et $x+h$, que nous appelons $\tau_f(x,h)$. Ce taux de variation est défini par :

$$\tau_f(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{\sqrt{h}} = 2x + h.$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_f(x,h) = 2x$, c'est-à-dire que f est dérivable en x, et $f'(x) = 2x$. ■

3.4 Fonction dérivée de la fonction inverse

Théorème 3.4 *La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbf{R}_*$, est dérivable sur $\mathbf{R}_*$, et sa fonction dérivée est :*

$$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}.$$

Preuve : Soit $x \in \mathbf{R}^*$ et $h \in \mathbf{R}^*$ tel que $x + h \neq 0$. Calculons le taux de variation de f entre x et $x+h$, que nous appelons $\tau_f(x,h)$. Ce taux de variation est défini par :

$$\tau_f(x,h) = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} x(x+h) = x^2$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_f(x,h) = -\frac{1}{x^2}$, c'est-à-dire que f est dérivable en x, et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. ■

3.5 Fonction dérivée d'un produit

Théorème 3.5 *Soient f et g deux fonctions dérivables en un même point x. La fonction $fg : x \mapsto f(x) \times g(x)$ est dérivable en x et vérifie :*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Preuve : On admet le résultat suivant : si une fonction u est dérivable en un point a, alors $\lim_{x \to a} u(x) = u(a)$.

Soit $x \in \mathbf{R}^*$ et $h \in \mathbf{R}^*$. Calculons le taux de variation de fg entre x et $x+h$, que nous appelons $\tau_{fg}(x,h)$. Ce taux de variation est défini par :

$$\begin{aligned}
\tau_{fg}(x,h) &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Or :

— Par définition de la dérivabilité de f en x,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\ ;$$

— Par définition de la dérivabilité de g en x,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)\ ;$$

— D'après le résultat admis, $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

Par opération sur les limites, il suit que :

$$\lim_{h\to 0}\tau_{fg}(x,h)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

Donc fg est dérivable en x et $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. ■

4 Trigonométrie

4.1 Calcul de $\sin\frac{\pi}{4}$.

Théorème 4.1 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Preuve : Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. Considérons le point A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire que $A\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Soit B le projeté orthogonal de A sur la droite $(O,\vec{i})$. Par définition, le triangle OAB est rectangle en B. Donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=OB^2+BA^2=OA^2=1.$$

En outre, $\widehat{BOA}=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{OAB}=\pi-\widehat{ABO}-\widehat{BOA}=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$. Il suit que le triangle BOA est isocèle en B, donc :

$$\sin\frac{\pi}{4}=AB=OB=\cos\frac{\pi}{4}.$$

En combinant ces deux égalités, on obtient :

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}=1,$$

soit
$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or, $0 \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \pi$, donc $\sin \frac{\pi}{4} \geqslant 0$, d'où
$$\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
■

4.2 Calcul de $\sin \frac{\pi}{3}$ et $\cos \frac{\pi}{3}$.

Théorème 4.2 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Considérons le point A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire que $A\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Soit $B(1, 0)$ et $H\left(\cos \frac{\pi}{3}, 0\right)$ le pied de la hauteur en A du triangle OAB.

A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc $OA = OB$, et OAB est isocèle en O. Il résulte que $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Comme de plus $\widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{BOA} = \pi$, $\widehat{OAB} = \frac{\pi - \widehat{BOA}}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Donc le triangle AOB est équilatéral. En particulier, la droite (AH) portée par la hauteur $[AH]$ est la médiatrice du segment $[AB]$, donc H est le milieu de $[AB]$. On en déduit que $AH = \frac{1}{2}$, et donc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

De plus, OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore,
$$OH^2 + HA^2 = OA^2,$$
$$\frac{1}{2^2} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1,$$
$$\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}.$$

Or, $0 \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \pi$, donc $\sin \frac{\pi}{3} \geqslant 0$, d'où
$$\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
■

Géométrie

5 Produit scalaire

5.1 Formule d'Al-Kashi

Théorème 5.1 *Soit ABC un triangle. On a :*
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

Preuve : D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Prenons le carré scalaire de l'égalité précédente. On obtient :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2.$$

Or,

— $\overrightarrow{BC}^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = BC^2$;

— De même, $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2$;

— De même, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$;

— Enfin, par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Le résultat suit immédiatement. ■

5.2 Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Théorème 5.2 *Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle de diamètre AB.*

Preuve : On raisonne par équivalences successives.

Soit M un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
ssi $AM \times BM \times \cos\widehat{AMB} = 0$,
ssi $AM = 0$ ou $BM = 0$ ou $\cos\widehat{AMB} = 0$,
ssi $M = A$ ou $M = B$ ou $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$,
ssi $M = A$ ou $M = B$ ou le triangle AMB est rectangle en M,
ssi $M = A$ ou $M = B$ ou M appartient au cercle de diamètre AB,
ssi M appartient au cercle de diamètre AB. ■