

Correction du baccalauréat blanc de mathématiques

Sarah Bonnet et Valentin Melot

1^{er} février 2020

Remarques générales

Politique de notation. Les deux parties ont été corrigées indépendamment, et traitées comme deux devoirs distincts. Les notes ont été calculées par exercice, voire par partie d'exercice, et certaines questions ont été isolées. Ainsi, pour chaque candidat, ont été établies des notes pour :

- l'exercice 1 (sur 5 points) ;
- l'exercice 2 (sur 2,5 points) ;
- l'exercice 3A (sur 1,5 point) ;
- l'exercice 3B (sur 2 points) ;
- l'exercice 3C, hors question 5 (sur 2,5 points) ;
- la question 5 de l'exercice 3C (sur 2,5 points) ;
- l'exercice 4 (sur 4 points) ;
- l'exercice 5 (sur 4 points) ;
- l'exercice 6A (sur 5 points) ;
- l'exercice 6B, hors question 7 (sur 5 points) ;
- la question 7 de l'exercice 6B (sur 2,5 points) ;
- l'exercice 7 (sur 3,5 points).

Dans la mesure du possible, les erreurs n'ont été sanctionnées qu'une seule fois lorsqu'elles avaient des conséquences sur les questions suivantes. Toutefois, une erreur qui conduisait à contourner la difficulté des questions suivantes a conduit à ne pas accorder l'ensemble des points à plusieurs questions.

Remarques de fond.

En général :

- Les programmes des années précédentes (seconde et première) sont supposés être maîtrisés à l'entrée en classe de terminale. L'épreuve de spécialité du baccalauréat peut par ailleurs comporter des exercices centrés sur des notions du programme de première. Les élèves sont invités à vérifier qu'ils maîtrisent l'ensemble des notions vues les deux années précédentes, et les retravailler en autonomie si ce n'est pas le cas.
- De nombreuses copies témoignent d'une prise de recul insuffisante sur des notions pourtant simples. Les candidats devraient davantage, dans l'apprentissage de leur cours, tenter de s'interroger sur le sens des concepts manipulés, et chercher des exemples ou contre-exemples simples, et rechercher des cas limites. L'assimilation du cours ne peut pas se limiter à retenir des « recettes » fonctionnant sur des questions-types.
- Il est dommage, lorsque des questions successives sont indépendantes ou que leur résultat est donné, de rester bloqué et abandonner toute une partie d'un problème. Il n'est pas rare que des candidats bloquent à une question et ne tentent pas la suite du problème, alors même qu'elle restait à leur portée.
- La rédaction pourrait être largement améliorée dans de nombreuses copies. Ne pas hésiter à prendre exemple sur les corrigés complets proposés.
- Trop souvent, dans une question, une première erreur, commise de bonne foi, est compensée par une deuxième erreur, grossière, qui permet d'arriver « par hasard » au bon résultat. Les correcteurs en sont rarement dupes, et ces double-erreurs sont du plus mauvais effet. Elles seront lourdement sanctionnées dans le supérieur.
- De la même façon, les correcteurs ne seront pas trompés par une conclusion, donnée par l'énoncé, affirmée de façon péremptoire après une démonstration de toute apparence incorrecte. C'est par exemple le cas lorsque l'application des règles d'opérations sur les limites aboutissent à une forme indéterminée, mais que le candidat conclut en donnant la valeur de la limite comme si elle s'en déduisait immédiatement.
- 4,5 points sur 40 étaient relatifs aux TICE. Celles-ci sont encore sources d'importantes difficultés, y compris dans de bonnes copies. En cas de doute sur le remplissage d'un algorithme, il est utile de chercher à l'exécuter manuellement, et vérifier si le résultat est celui attendu. Compte tenu des exigences du programme de CPGE à compter de la rentrée 2021, les candidats à l'admission dans ces filières sont invités à approfondir sérieusement cette partie du programme.
- Vérifier que des objets dont l'égalité est affirmée sont de même nature permet d'éviter des erreurs simples. Un nombre ne peut jamais être égal à un point, ni une fonction à un nombre, par exemple.

- Lorsque le résultat d'une question est donné dans l'énoncé, se contenter de le réécrire comme une évidence ne rapporte aucun point.
- Dans une réponse à une question, on attend que chaque énoncé mathématique rédigé découle directement du précédent. Bien souvent, il est clair que les candidats ne seraient pas capables de justifier à eux-mêmes un passage d'une ligne à la suivante. Le correcteur n'a alors aucune chance d'être convaincu. En conséquence, il est souhaitable de s'assurer que chaque assertion formulée est bien *évidente* une fois lue la précédente. Si tel n'est pas le cas, alors il est probable que le raisonnement comporte une faille.

Sur le raisonnement :

- Le mot « donc » doit séparer des arguments qui possèdent un lien logique. Par exemple, lorsqu'un candidat énonce une assertion, puis un théorème et les sépare par « donc », on s'attend à ce que l'assertion soit une hypothèse du théorème. Si ce n'est pas le cas, il est permis de se demander si le candidat connaît les hypothèses du théorème qu'il utilise.
- Il ne faut jamais présupposer, pour démontrer l'hérédité dans une récurrence, que la propriété à montrer serait « vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ ». C'est précisément ce que l'on cherche à démontrer.
- De nombreux candidats, lorsqu'ils lisent dans l'énoncé qu'une question est à démontrer par récurrence, s'empressent de rédiger la structure d'une récurrence sans se préoccuper de savoir si leur argument pour l'hérédité est correct. Pourtant, lorsque la preuve de l'hérédité est fautive, l'ensemble de l'argumentaire s'effondre. Très peu de points sont accordés en ce cas, même si le modèle de rédaction est respecté.

En combinatoire :

- Il est souvent utile de vérifier que la formule proposée fonctionne pour des plus petites valeurs que celles de l'énoncé. Par exemple, pour le nombre de classements possibles recherché à la question 3.a de l'exercice 1, il est possible de vérifier avec seulement trois équipes si le nombre donné par la formule utilisée est correct.
- Il n'est pas inutile, en combinatoire, de comparer les nombres trouvés à des ordres de grandeur connus ou imaginables. Un candidat peut raisonnablement estimer qu'un tournoi majeur de rugby ne pourra pas comporter plusieurs milliers de rencontres, par exemple, réponse pourtant retrouvée dans certaines copies.

En probabilités :

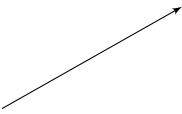
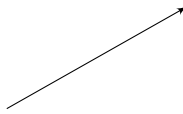
- De trop nombreux candidats ont du mal à faire le lien entre les probabilités intervenant dans les énoncés et leurs modélisations mathématiques. Lorsqu'un énoncé fait intervenir une probabilité sous une forme telle que « la proportion de billes vendables parmi la production de la machine A », il est indispensable de se demander si celle-ci correspond à $P(A \cap V)$, $P_A(V)$ ou $P_V(A)$. De trop nombreuses erreurs en découlent.
- De façon similaire, on lit trop souvent dans des copies des raisonnements informels, dans lesquels une intuition est évoquée sans le recours au formalisme des probabilités. Tout l'intérêt du programme de mathématiques en probabilités est qu'il permet de rendre ces intuitions rigoureuses : il est dommage de ne pas y recourir.
- On ne peut jamais faire l'hypothèse d'indépendance de deux événements si elle n'est pas affirmée par l'énoncé, en particulier lorsque le problème fait intervenir des probabilités conditionnelles.
- De même, certains candidats inventent des probabilités qui ne sont pas données par l'énoncé. Par exemple, à l'exercice 2, il est régulièrement affirmé sans justification que « il y a 50 % de chances que le joueur choisisse chaque jeu ».
- Bien que n'étant pas formellement au programme, la notion de test statistique est un classique d'exercice d'application du programme de terminale. Elle suppose un minimum de recul sur ce que signifient les probabilités et leur interprétation. Il est surprenant, à la partie B de l'exercice 3, que la plupart des candidats ne voient pas en quoi la survenue d'un événement dont la probabilité est de l'ordre de 10^{-3} est quelque chose qui doit interroger.

En géométrie :

- L'énoncé de la question 3 de l'exercice 4 comportait une erreur. L'on pouvait raisonnablement attendre des candidats qu'ils la repèrent. Le barème de correction en a tenu compte.
- Ce n'est pas parce que deux droites ne sont pas parallèles qu'elles sont sécantes. Il est également possible qu'elles ne soient pas coplanaires (exercice 4.5).
- Trop peu de candidats se souviennent de ce qu'est un vecteur directeur d'une droite ou un produit scalaire (exercice 5). Ces notions sont respectivement au programme de seconde et de première.
- L'équation d'un ensemble (d'une droite, notamment) doit consister en une égalité ou un ensemble d'égalités vérifiées par les coordonnées des points de cet ensemble. Une « $\mathcal{T}_a = f'(a)(x - a) + f(a)$ » n'est pas une équation de la droite \mathcal{T}_a . L'écriture correcte est ici : $\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

En analyse :

- Les trois exercices de la partie « analyse » reposaient en grande partie sur des notions du programme de première. Les seules questions faisant appel au programme de terminale étaient celles qui requéraient des calculs de limites de suites et fonctions ou des récurrences. Il s'agissait, dans l'exercice 6, de la question 3 de la partie A et des questions 6 et 7 de la partie B ; et dans l'exercice 7 des questions 1, 3.b et 3.c. L'exercice 5 pouvait être traité avec les seules notions du programme de première. Autrement dit, **sur la deuxième partie, il était possible d'obtenir la note de 14/20 dans le barème initial sans aborder le programme de terminale** ; sur les six points restants, deux pouvaient être obtenus en répondant à une question de cours.
- De nombreux candidats n'ont pas réussi un seul calcul de dérivée dans le sujet. Cette situation est inquiétante. Rappelons que la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées (!).
- Dans la démonstration du théorème de croissance comparée, trop de candidats utilisent, de façon sous-entendue, l'hypothèse selon laquelle x peut être choisi strictement positif. À défaut de justifier ce choix (par le fait que l'on se place au voisinage de $+\infty$), il faut au moins le rendre explicite.
- La méthode d'établissement d'un tableau de variations n'est pas respectée. Le tableau de variation doit comporter le signe de la fonction dérivée, éventuellement précédé du signe des facteurs lorsque la dérivée est connue sous une forme factorisée. Toutes les informations disponibles (limites, extrema. . .) doivent être présentés (exercices 6A et 7). Trop de candidats inventent des valeurs interdites qui n'ont pas de raison d'être (exercice 6A).
- En particulier, on trouve souvent des tableaux du type :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		+	+
Var. de f			

Lesquels n'ont pas de sens, s'il n'y a pas de discontinuité en 0.

- Le terme « négliger » est trop souvent utilisé à mauvais escient (exercice 6A).
- « FI » n'est pas une valeur que peut prendre une limite. Une réponse du type « $\lim f(x) = FI$ » n'est jamais satisfaisante.

- Sauf consigne de l'énoncé, il n'est pas utile de faire figurer des arguments qui ne permettent pas d'aboutir au résultat attendu. Par exemple, lorsque l'application des règles d'opérations sur les limites aboutissent à une forme indéterminée, il n'est pas utile de l'expliquer : mieux vaut tout de suite appliquer la stratégie permettant de dépasser cette forme indéterminée et d'aboutir à la valeur recherchée.

Sur les aspects numériques :

- Lors de l'inscription de formules dans un tableur, un signe = est attendu.
- La notion de simulation d'une variable aléatoire suivant une loi donnée n'est pas bien assimilée. Très peu de copies ont su expliquer, même sommairement, ce que faisait la fonction Python de la partie C de l'exercice 3.

Remarques de forme. Dans l'ensemble, les copies appellent les remarques suivantes, qui seront utiles pour les années ultérieures :

- Il est recommandé de faciliter le travail des correcteurs. L'existence de marges, de sauts de lignes et l'indication de démarcations entre les exercices est obligatoire. Quelques candidats ont le réflexe d'encadrer ou souligner les résultats : cette pratique devrait être généralisée.
- Il est souhaitable de faire référence, sur les copies, aux annexes, par des mentions du type « voir annexe A ».
- Se méfier des encres effaçables ou des stylos de type « friction ». Ces encres peuvent avoir tendance à s'effacer de façon spontanée, en raison de la présence d'effaceur sur une copie voisine dans le paquet notamment. En outre, les encres trop claires fatiguent la vue et sont à éviter (elles sont explicitement interdites au concours général des lycées). Une encre bleue foncé ou noire est à privilégier.
- Plusieurs notations inexactes sont observées, y compris dans les très bonnes copies. Une expression de la forme $(f(x))'$ n'est pas acceptable, et a systématiquement été sanctionnée.
- Les successions de calcul devraient être mieux justifiées. Il est utile de justifier, ligne à ligne, les transformations non-triviales effectuées par des mentions du type « d'après l'hypothèse de récurrence », « d'après la question précédent » ou « d'après le résultat admis ». Une série d'égalités ou d'inégalités juxtaposées ne constitue pas une démonstration digne de ce nom.
- Il ne devrait normalement pas y avoir de variable libre. Plus généralement, les quantificateurs ne sont pas facultatifs. Des formulations telles que « pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : » devraient davantage se retrouver dans les copies.

- Il est généralement préférable de nommer explicitement les propositions démontrées par récurrence (sous la forme « pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle \mathcal{H}_n la proposition : ... »). Toutefois, aucun point n'a été retiré si cela n'était pas fait.

De façon générale, un effort de rigueur est attendu sur les notations. Si les correcteurs n'ont pas cherché à sanctionner trop lourdement les écarts de notation lorsque l'idée générale était présente, ils mettent en garde l'ensemble des candidats quant au niveau élevé d'attente auquel ils seront confrontés sur ce point dans les études supérieures, en particulier en CPGE.

Première partie

Probabilités et géométrie

Exercice 1

Question 1. On peut voir les choses de deux façons :

$$80\,000 - 52\,000 = 28\,000$$

Il y avait 28 000 spectateurs anglais.

$$28\,000 - 11\,180 = 16\,820$$

Il y avait 16 820 hommes anglais.

$$16\,820 + 38\,700 = 55\,520$$

Il y avait donc 55 520 hommes.

$$52\,000 - 38\,700 = 13\,300$$

Il y avait 13 300 spectatrices françaises.

$$80\,000 - 13\,300 - 11\,180 = 55\,520$$

Il y avait donc 55 520 hommes au total dans le stade.

Question 2. Il y a 6 équipes et chaque équipe affronte les 5 autres une seule fois. On cherche donc le nombre de combinaisons de 2 équipes parmi 6.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Lors de ce tournoi, 15 matchs sont disputés.

Question 3.a. Le nombre de classements différents correspond au nombre de permutations possibles des 6 équipes.

$$6! = 720$$

720 classements différents sont possibles.

Question 3.b Une fois le classement de la France « fixé », il ne reste plus qu'à placer les 5 autres équipes.

$$5! = 120$$

120 classements avec la France à la deuxième place sont possibles.

Question 4.a. Le sélectionneur doit choisir 5 joueurs parmi les 15. On cherche donc le nombre de permutations de 5 éléments parmi 15.

$$\binom{15}{5} = 3003$$

Le sélectionneur peut constituer 3 003 groupes.

Question 4.b. Le sélectionneur doit maintenant choisir 4 joueurs parmi les 14 qui restent puisqu'il décide de choisir le capitaine. On cherche donc le nombre de permutations de 4 éléments parmi 14.

$$\binom{14}{4} = 1001$$

Le sélectionneur peut constituer 1 001 groupes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	

Question 5.a. On utilise la relation de Pascal : pour tous entiers naturels n et k tels que $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n - 1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Pour remplir la case **B16**, on écrit donc la formule :

$$\boxed{=A15+B15}$$

et on la recopie vers la droite pour obtenir la 16^e ligne du triangle de Pascal.

Question 5.b La 15^e ligne du triangle de Pascal donne les coefficients binomiaux pour $n = 14$ (puisque'il commence à 0). Le résultat de la question 4.a. se trouve donc sur la 16^e ligne, dans la 6^e colonne (puisque la première correspond à $k = 0$), c'est-à-dire en **F16**.

Question 5.c Les coefficients binomiaux sont symétriques : pour tous nombres entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on a :

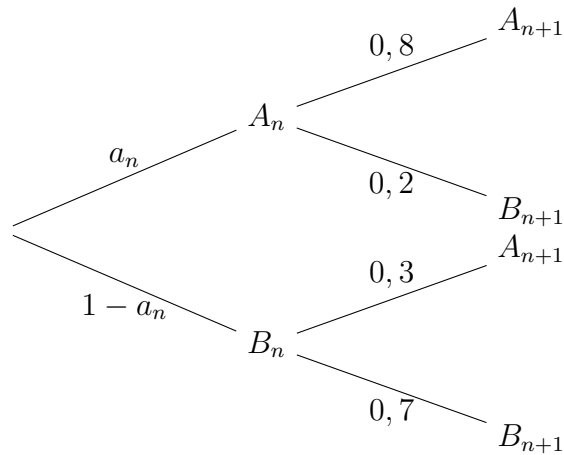
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ donc } \binom{14}{3} = \binom{14}{11}.$$

Les cellules **D15** et **L15** ont donc la même valeur.

Une coïncidence fait que $\binom{14}{8} = \binom{15}{5}$. Néanmoins, il n'y a aucune raison, autre que cette coïncidence, pour que le coefficient $\binom{14}{8}$ soit la réponse à la question : la réponse « **I15** » ne pouvait donc pas être satisfaisante.

Exercice 2

Question 1.a. On obtient l'arbre suivant :



Question 1.b Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

On sait que A_n et B_n forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\ &= 0,8 a_n + 0,3 - 0,3 a_n \\ P(A_{n+1}) &= 0,5 a_n + 0,3. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3.}$$

Question 2.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,5 a_n + 0,3 - 0,6 \\ &= 0,5 (a_n - 0,6) \\ \text{donc } u_{n+1} &= 0,5 u_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

Question 2.b. On en déduit donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}.$$

Or $u_n = a_n - 0,6$ donc $a_n = u_n + 0,6$

et ainsi $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

Question 2.c. On sait que $-1 < 0,5 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$.

Par produit et par somme, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$.

La probabilité qu'un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo fasse une partie d'*Assassin's Creed* est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de *Bomberman* est 0,4. La publicité la plus vue par ce joueur devrait donc être celle insérée en début des parties d'*Assassin's Creed*.

Exercice 3 — Partie A

Question 1. D'après l'énoncé on a $P(V) = 0,96$, $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$. Donc

$$\begin{aligned}P(A \cap V) &= P(A) \times P_A(V) \\ &= 0,6 \times 0,98 \\ &= 0,588\end{aligned}$$

La probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A est égale à 0,588.

Question 2. On sait que A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$$

$$\text{donc } P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi } P_B(V) &= \frac{P(B \cap V)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \cap V)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0,372}{0,4} \\ P_B(V) &= 0,93\end{aligned}$$

Question 3. On calcule

$$\begin{aligned}P_{\bar{V}}(B) &= \frac{P(B \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} \\ &= \frac{P(B) \times P_B(\bar{V})}{P(\bar{V})} \\ &= \frac{P(B) \times (1 - P_B(V))}{1 - P(V)} \\ &= \frac{0,4 \times 0,07}{0,04} \\ P_{\bar{V}}(B) &= 0,7\end{aligned}$$

Le technicien a donc raison d'affirmer que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.

Exercice 3 — Partie B

Question 1.a. On est dans le cas d'une épreuve de Bernoulli dont les deux issues sont :

- le succès « la bille est noire » de probabilité $p = \frac{1}{5} = 0,2$
- l'échec « la bille n'est pas noire » de probabilité $q = 1 - p = 0,8$

Cette épreuve est répétée 40 fois de manière identique et indépendante (schéma de Bernoulli). Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de billes noires dans le sachet. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0,2)$. On cherche

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} \times 0,2^{10} \times 0,8^{30} \approx 0,107$$

. La probabilité que le sachet contienne exactement 10 billes noires est $P(X = 10) \approx 0,107$.

Question 1.b. Supposons que la machine fonctionne correctement. En ce cas, comme démontré à la question précédente, $X \sim \mathcal{B}(40, 0,2)$.

Si un sachet comporte 16 billes, alors l'événement ($X \geq 16$) est réalisé. Or, à l'aide de la calculatrice, on a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 16) &= 1 - P(X < 16) \\ &= 1 - P(X \leq 15) \\ P(X \geq 16) &\approx 0.003. \end{aligned}$$

Autrement dit, si la machine fonctionne correctement, alors on a assisté à un événement de probabilité 3 ‰. Cet événement est possible, mais très improbable. On peut donc s'interroger sur le bon fonctionnement de la machine.

Question 2. On répète l'épreuve de Bernoulli de la question précédente n fois de manière identique et indépendante. X est la variable aléatoire comptant le nombre de billes noires dans le sachet. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,2)$. On cherche $n \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$P(X \geq 1) \geq 0,99.$$

$$\text{ssi } 1 - P(X = 0) \geq 0,99$$

$$\text{ssi } 1 - (1 - p)^n \geq 0,99$$

$$\text{ssi } 1 - 0,8^n \geq 0,99$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

Toute autre réponse argumentée, notamment par le fait que le résultat était *possible* (probabilité non-nulle) ou que la déviation à l'espérance était importante, a été valorisée.

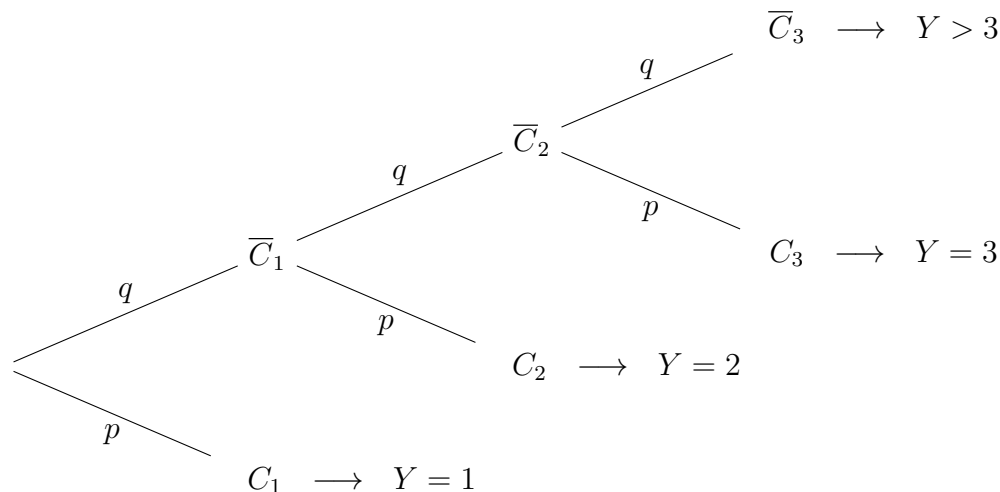
— pour $n = 20$: $P(X \geq 1) \approx 0,9885 < 0,99$

— pour $n = 21$: $P(X \geq 1) \approx 0,9908 \geq 0,99$

Chaque sachet doit donc contenir au moins 21 billes pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3 — Partie C

Question 1. (a et b) On obtient l'arbre suivant :



Question 2. `random.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. La condition `random.random() < p` est donc vraie avec une probabilité p , et fautive avec une probabilité $1 - p$.

Autrement dit, à chaque tour de boucle, on réalise une épreuve aléatoire à deux issues, dont la probabilité de succès est p , et la probabilité d'échec q .

Tant que l'on obtient des échecs, la boucle se poursuit, et l'on incrémente le compteur C . Dès que l'on obtient un succès, on renvoie C . Ainsi, la valeur de retour correspond au nombre d'expériences réalisées avant d'obtenir le premier succès.

Aussi, la fonction simule un tirage de la variable aléatoire Y .

Incrémenter une variable signifie lui ajouter 1.

Question 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $(Y > n) = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_n$ donc

$$\begin{aligned} P(Y > n) &= P(\bar{C}_1) \times P_{\bar{C}_1}(\bar{C}_2) \times \dots \times P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_{n-1}}(\bar{C}_n) \\ &= \underbrace{q \times q \times \dots \times q}_{n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y > n) = q^n.}$$

À noter que les événements C_i sont mutuellement indépendants.

Question 4. Soit $n \in \mathbf{N}$. $Y = n$ si et seulement si $Y > n - 1$ et $\overline{Y > n}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(Y > n - 1) - P(Y > n) \\ &= q^{n-1} - q^n && \text{d'après la question précédente} \\ &= q^{n-1}(1 - q). \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{P(Y = n) = pq^{n-1}.}$$

La loi de Y est appelée *loi géométrique de paramètre p* . Elle compte le nombre d'expériences avant premier succès d'un schéma de Bernouilli.

Question 5.a. Pour tout événement élémentaire ω ,

$$\begin{cases} G(\omega) = Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \leq 10, \\ G(\omega) = 0 & \text{si } Y(\omega) > 10. \end{cases}$$

Donc $(G = 0) = (Y > 10)$, et pour tout entier k compris entre 1 et 10, $(G = k) = (Y = k)$.

Donc $P(G = 0) = P(Y > 10) = q^{10}$, et pour tout entier k compris entre 1 et 10, $P(G = k) = P(Y = k) = pq^k$.

La loi de G est donc donnée par :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(G = x_i)$	q^{10}	p	pq	pq^2	pq^3	pq^4	pq^5	pq^6	pq^7	pq^8	pq^9

Question 5.b. D'après la formule de transfert,

$$\mathbf{E}(G) = 0 \cdot P(G = 0) + 1 \cdot P(G = 1) + 2 \cdot P(G = 2) + \cdots + 10 \cdot P(G = 10)$$

$$\mathbf{E}(G) = p + 2pq + 3pq^2 + \cdots + 10pq^9$$

$$\boxed{\mathbf{E}(G) = (1 - q) + 2q(1 - q) + 3q^2(1 - q) + 10q^9(1 - q).}$$

Question 5.c. En développant chacun des termes, on écrit :

$$\mathbf{E}(G) = 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 + \dots + 9q^8 - 9q^9 + 10q^9 - 10q^{10}$$

$$\mathbf{E}(G) = 1 + q + q^2 + \dots + q^8 + q^9 - 10q^{10}.$$

On reconnaît une somme géométrique. On peut donc bien écrire :

$$\mathbf{E}(G) = \frac{1 - q^{10}}{1 - q} - 10q^{10}.$$

La technique consistant à simplifier chaque terme avec celui immédiatement voisin s'appelle un télescopage.

Rédaction alternative :

$$\mathbf{E}(G) = (1 - q) + 2q(1 - q) + 3q^2(1 - q) + 10q^9(1 - q)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \times (1 - q)q^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (kq^{k-1} - kq^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{i=0}^9 (i+1)q^i - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{i=0}^9 (iq^i + q^i) - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{i=0}^9 iq^i + \sum_{i=0}^9 q^i - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{k=0}^9 kq^k + \sum_{k=0}^9 q^k - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{k=0}^9 q^k + \sum_{k=0}^9 kq^k - \sum_{k=1}^{10} kq^k$$

$$= \sum_{k=0}^9 q^k + 0 + \sum_{k=1}^9 kq^k - \sum_{k=1}^9 kq^k - 10q^{10}$$

$$= \sum_{k=0}^9 q^k - 10q^{10}$$

$$= \frac{1 - q^{10}}{1 - q} - 10q^{10}$$

Cette rédaction n'est pas attendue en Terminale (elle n'est là qu'à titre indicatif pour préparer certains à l'an prochain). La précédente suffisait. On fait un changement de variable en posant $i = k - 1$ donc $k = i + 1$

La première somme est la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Question 5.d. Sarah a intérêt à proposer à Valentin de jouer à ce jeu lorsque $\mathbf{E}(G) < 3$.

Par lecture graphique, cela correspond aux cas où $q < 0,71$ ou $q > 0,90$.

Donc Sarah a intérêt à proposer à Valentin de jouer lorsque $p > 0,29$ ou $p < 0,10$.

En effet, si p est trop proche de 0, alors les situations où Valentin perdra seront fréquentes. Mais si p est trop grand, alors Y prendra souvent des valeurs inférieures à 3, et Valentin gagnera moins de capsules de café qu'il n'en donne à Sarah.

Exercice 4

Question 1. Par lecture graphique, on peut dire que $C(8; 15; 0)$.

Question 2. On a : $\vec{IJ} \begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix}$ donc $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 7 - 8 \\ 15 - 8 \\ 3 - 3 \end{pmatrix}$ et ainsi

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, $\vec{IC} \begin{pmatrix} 8 - 8 \\ 15 - 8 \\ 0 - 3 \end{pmatrix}$ et ainsi $\vec{IC} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Question 3. Le sujet comportait une erreur. Les points de la question ont donc été attribués à tous (avec un bonus pour ceux qui ont signalé l'erreur ou ont démontré que la droite n'était pas dans le plan).

Question 4.a. Soit $K \in (EF)$. Alors $K(x_K; 0; 3)$ et $\vec{AK} \begin{pmatrix} x_K \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. On raisonne par équivalences successives.

Supposons par l'absurde que les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IC} sont colinéaires. Alors il existe un réel k tel que $\vec{IJ} = k\vec{IC}$

ssi il existe un réel k tel que $\begin{cases} -1 = 0 \times k \\ 7 = 7k \\ 0 = -3k \end{cases}$. C'est impossible donc

les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IC} ne sont pas colinéaires.

D'après la caractérisation des vecteur coplanaires :

Les vecteurs \vec{AK} , \vec{IJ} et \vec{IC} sont coplanaires

ssi il existe deux réels a et b tels que $\vec{AK} = a\vec{IJ} + b\vec{IC}$

ssi il existe deux réels a et b tels que $\begin{cases} x_K = a \times (-1) + b \times 0 \\ 0 = a \times 7 + b \times 7 \\ 3 = a \times 0 + b \times (-3) \end{cases}$

ssi il existe deux réels a et b tels que $\begin{cases} x_K = -a \\ a = -b \\ 3 = -3b \end{cases}$

Il est nécessaire de conserver à chaque ligne le « il existe deux réels tels que ».

$$\begin{aligned} \text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } & \begin{cases} x_K = -a \\ a = -b \\ b = -1 \end{cases} \\ \text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } & \begin{cases} x_K = -1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

ssi $x_k = -1$.

Ainsi $K(-1; 0; 3)$ et $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CJ}$.

Puisque la condition « il existe deux réels a et b tels que $a = 1$ et $b = -1$ est toujours vraie (ces deux réels existent bien), on peut la faire disparaître sans perdre d'équivalence.

Question 4.b. Soit $M \in (EH)$. Alors $M(0; y_M; 3)$ et $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IC} sont coplanaires

ssi il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IC}$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} 0 = a \times (-1) + b \times 0 \\ y_M = a \times 7 + b \times 7 \\ 3 = a \times 0 + b \times (-3) \end{cases}$$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} a = 0 \\ y_M = 7(a + b) \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} a = 0 \\ y_M = -7 \\ b = -1 \end{cases}$$

ssi $y_M = -7$.

Ainsi $M(0; -7; 3)$ et $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CI}$.

Question 4.c. On sait que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CJ}$ donc les droites (AK) et (CJ) sont parallèles et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CI}$ donc les droites (AM) et (CI) sont parallèles.

De plus, les droites (AK) et (AM) sont sécantes en A appartenant au plan (AMK) et sont respectivement parallèles aux droites (CJ) et (CI) sécantes en C appartenant au plan (IJC) .

Or deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Les plans (IJC) et (AMK) sont donc parallèles.

Question 5. On a $\overrightarrow{KD} \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Supposons par l'absurde que les droites (KD) et (BM) sont parallèles. Alors il existe un réel k tel que $\overrightarrow{KD} = k\overrightarrow{BM}$

$$\text{ssi il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} 1 = -8k \\ 15 = -7k \\ -3 = 3k \end{cases}$$

$$\text{ssi il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = -\frac{1}{8} \\ k = -\frac{7}{15} \\ k = -1 \end{cases}$$

ABSURDE donc les droites (KD) et (BM) ne sont pas parallèles.

$$\text{On a également } \overrightarrow{KB} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Supposons par l'absurde que les vecteurs \overrightarrow{KB} , \overrightarrow{KD} et \overrightarrow{BM} sont coplanaires. Puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{KD} = a\overrightarrow{KB} + b\overrightarrow{BM}$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} 1 = a \times 9 + b \times (-8) \\ 15 = a \times 0 + b \times (-7) \\ -3 = a \times (-3) + b \times 3 \end{cases}$$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} 1 = 9a + \frac{120}{7} \\ b = \frac{-15}{7} \\ -3 = -3a - \frac{45}{7} \end{cases}$$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{cases} a = \frac{-113}{63} \\ b = \frac{-15}{7} \\ a = \frac{24}{21} \end{cases}$$

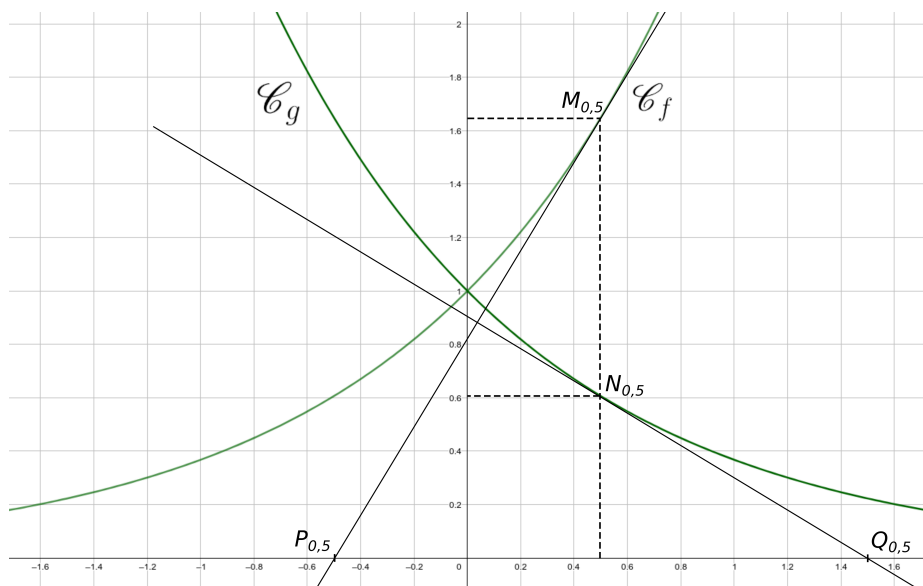
Absurde. Les droites ne sont pas coplanaires, elles ne sont donc pas non plus sécantes.

Deuxième partie

Analyse

Exercice 5

Question 1.



Question 2.a. Une équation de la tangente \mathcal{T}_a est donnée par :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a) = e^a(x - a) + e^a.$$

Une équation de la tangente \mathcal{U}_a est de même :

$$\mathcal{U}_a : y = g'(a)(x - a) + g(a) = -e^{-a}(x - a) + e^{-a}.$$

Le sujet comportait une coquille, corrigée pendant l'épreuve. \mathcal{T}_a est bien sûr la tangente en M_a , et \mathcal{U}_a la tangente en N_a .

Question 2.b. Un vecteur directeur de \mathcal{T}_a est :

$$\vec{d}_{\mathcal{T}_a} \begin{pmatrix} 1 \\ e^a \end{pmatrix}.$$

Une droite d'équation réduite $y = \alpha x + \beta$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Tout vecteur non-nul, colinéaire à celui-ci convenait.

De même, un vecteur directeur de \mathcal{U}_a est :

$$\boxed{\vec{d}_{\mathcal{U}_a} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-a} \end{pmatrix}}.$$

Question 2.c. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{d}_{\mathcal{T}_a} \cdot \vec{d}_{\mathcal{U}_a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-a} \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 1 + e^a \times (-e^{-a}) \\ &= 1 - e^{a-a} \\ &= 1 - e^0 \\ &= 1 - 1 \\ \vec{d}_{\mathcal{T}_a} \cdot \vec{d}_{\mathcal{U}_a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-a} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Or, deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si elles sont dirigées par des vecteurs orthogonaux.

Donc \mathcal{T}_a et \mathcal{U}_a sont perpendiculaires, ce quelle que soit la valeur de a .

Question 3.a. Notons $(x; y)$ les coordonnées de P_a , et $(x'; y')$ les coordonnées de Q_a .

Puisque ces deux points appartiennent à l'axe des abscisses, $y = y' = 0$. De plus, $P_a \in \mathcal{T}_a$, donc :

$$y = 0 = e^{0,5}(x - 0,5) + e^{0,5},$$

d'où

$$x = -\frac{e^{0,5}}{e^{0,5}} + 0,5 = -0,5.$$

De même, $Q_a \in \mathcal{U}_a$, donc :

$$y' = 0 = -e^{-0,5}(x' - 0,5) + e^{-0,5},$$

d'où

$$x' = \frac{-e^{-0,5}}{-e^{-0,5}} + 0,5 = 1,5.$$

Les coordonnées recherchées sont donc :

$$\boxed{P_a(-0,5; 0) ; \quad Q_a(1,5; 0)}.$$

Il n'y a en pratique pas besoin d'arrondir, les valeurs obtenues étant des demi-entiers.

Question 3.b. Cf. question 1.

D'abord, placer $P_{0,5}$ et $Q_{0,5}$, puis tracer la tangente.

Question 3.c. Soient x_a et x'_a les abscisses respectives des points P_a et Q_a . De même qu'en question 3.a., on calcule x_a et x'_a en résolvant :

$$0 = e^a(x_a - a) + e^a \iff x_a = -\frac{e^a}{e^a} + a = -1 + a ;$$

$$0 = -e^{-a}(x'_a - a) + e^{-a} \iff x'_a = \frac{-e^{-a}}{-e^{-a}} + a = 1 + a.$$

Donc $P_a Q_a = |x_a - x'_a| = |-1 + a - 1 - a| = 2$.

La longueur $P_a Q_a$ est égale à 2 quelle que soit la valeur de a .

Exercice 6 — Partie A

Question 1. Si $n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^0 = 1$, donc $f_0(x) = e^{2x}$. La fonction $x \mapsto 2x$ est linéaire, donc dérivable sur \mathbf{R} . La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbf{R} . Par dérivée d'une composée, il suit que f_0 est dérivable sur \mathbf{R} et que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_0'(x) = 2e^{2x} = 2f_0(x).$$

Si $n \geq 1$, alors la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbf{R} et a pour dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$. En outre, de même que dans le cas $n = 0$, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur \mathbf{R} et a pour dérivée $x \mapsto 2e^{2x}$. Donc, par produit, la fonction f_n est dérivable sur \mathbf{R} et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}e^{2x} + x^n \times 2e^{2x} \\ &= (2x + n)x^{n-1}e^{2x} \\ f_n'(x) &= (2x + n)f_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Donc f_n est dérivable sur \mathbf{R} quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et :

$$\begin{cases} f_n'(x) = 2 f_0(x) & \text{si } n = 0, \\ f_n'(x) = (2x + n) f_{n-1}(x) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Question 2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{2x} > 0$, donc $f_n(x)$ est du même signe que x^n . Aussi, $f_n(x)$ est :

- positive si n est pair ou si n est impair et $x \geq 0$;
- négative si n est impair et $x \leq 0$;
- nulle si $n \geq 1$ et $x = 0$.

Question 3.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. On remarque que :

$$e^x = \left(e^{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1}.$$

Or, d'après le résultat admis,

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq 1 + \frac{x}{n+1} \geq \frac{x}{n+1}.$$

On traite les cas $n = 0$ et $n > 0$ différemment, comme y invitait l'énoncé.

Il s'agit ici simplement de reproduire une démonstration exigible, vue lors du chapitre sur les limites.

Supposons désormais $x > 0$. En élevant l'inégalité précédente à la puissance $n + 1$, on en déduit que :

$$e^x \geq \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Il suit que :

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} x^n.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$. Puisque $\frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$, le membre de droite de l'inégalité diverge vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$. Donc, d'après le théorème de limite par comparaison,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.}$$

On peut faire l'hypothèse $x \geq 0$ car on cherche une limite en $+\infty$. En d'autres termes, on se place sur $[0, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

Question 3.b. On recherche d'abord les limites des $f_n(x)$ en $+\infty$. On remarque que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, et donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$, par composition de limites.

- Traitons d'abord le cas $n = 0$ en . Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$. D'après ce qui précède, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$, c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty.$$

Traiter distinctement le cas $n = 0$ permet d'éviter d'écrire par la suite une égalité $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, qui serait fautive si $n = 0$.

- Supposons désormais $n \geq 1$. Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ d'après ce qui précède. Donc par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

On cherche par la suite les limites en $-\infty$. On remarque que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = x^n e^{2x} = x^n e^x e^x = e^x \frac{x^n}{e^{-x}} = (-1)^n \frac{e^x}{(-x)^n}.$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. En outre, d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$.

Donc, par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$.

En résumé, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0.}$$

Question 3.c. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n est définie sur \mathbf{R} donc la courbe représentative à f_n n'admet pas d'asymptote verticale.

En outre, d'après la question précédente, cette courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$, et n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

La courbe représentative de f_n admet donc, quelle que soit la valeur de n , une unique asymptote, d'équation $y = 0$.

Dans le cadre du programme de spécialité mathématiques de terminale, on se restreint aux droites asymptotes parallèles aux axes.

Question 4.a. Si n est un entier naturel pair non-nul, alors $n - 1$ est impair. On calcule le signe de f'_n à l'aide des questions 1 et 2. Finalement, le tableau de variations de f est donné par :

x	$-\infty$	$-\frac{n}{2}$	0	$+\infty$
$2x + n$	-	0	+	+
$f_{n-1}(x)$	-	0	0	+
$f'_n(x)$	+	0	-	+
Var. de f_n	0	$\frac{2^n}{n^n} e^{-\frac{n}{2}}$	0	$+\infty$

L'expression du maximum de f_n en $-\frac{n}{2}$ n'était pas attendue.

Question 4.b. De façon similaire, si n est un entier naturel impair, alors $n - 1$ est pair, donc les variations de f sont données par :

On pourrait distinguer le cas $n = 1$, pour lequel f'_n ne s'annule pas en 0. Néanmoins, cela n'a pas d'incidence sur les variations de f_n , mais seulement sur l'existence d'un point d'inflexion. L'étude de la convexité de f_n n'étant pas demandée, il n'est pas utile d'effectuer une telle distinction.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{n}$	0	$+\infty$
$nx + 2$	-	0	+	+
$f_{n-1}(x)$	+	0	0	+
$f'_n(x)$	-	0	0	+
Var. de f	0	$-\frac{2^n}{n^n} e^{-\frac{4}{n}}$	0	$+\infty$

Exercice 6 — Partie B

Question 1. On a directement, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g_0(x) = f_7(x) = x^7 e^{2x}.$$

La fonction $x \mapsto x^7$ est dérivable sur \mathbf{R} , de dérivée $x \mapsto 7x^6$. En outre, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur \mathbf{R} , de dérivée $x \mapsto 2e^{2x}$. Donc par dérivée d'un produit, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_0'(x) \\ g_1 &= 7x^6 e^{2x} + x^7 \times 2e^{2x}, \end{aligned}$$

$$g_1(x) = (2x^7 + 7x^6) e^{2x}.$$

Enfin, de la même façon, par combinaison linéaire, la fonction $x \mapsto 2x^7 + 7x^6$ est dérivable sur \mathbf{R} , de dérivée $x \mapsto 14x^6 + 42x^5$. Donc par dérivée d'un produit, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} g_2(x) &= g_1'(x) \\ g_2 &= (14x^6 + 42x^5) e^{2x} + (7x^6 e^{2x} + x^7) \times 2e^{2x} \end{aligned}$$

$$g_2(x) = (4x^7 + 28x^6 + 42x^5) e^{2x}.$$

Question 2. On identifie directement les coefficients des polynômes P_0 , P_1 et P_2 dans les expressions trouvées par calcul à la question précédente. On a donc :

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1, & v_0 = 0, \\ u_1 = 2, & v_1 = 7, \\ u_2 = 4, & v_2 = 28. \end{array}$$

Question 3. D'après l'affirmation 2, admise, la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie : pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_{k+1} = 2u_k$.

Donc $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$. Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$u_k = 2^k.$$

Il n'est pas utile de justifier à nouveau la dérivée de $x \mapsto e^{2x}$, déjà calculée à la première question de la partie A.

On utilise un résultat vu en première, dont la démonstration est d'ailleurs exigible.

Question 4.

```
def calcule_coefficients(k):  
    u = 1  
    v = 0  
    for i in range(k):  
        nouveau_u = 2*u  
        nouveau_v = 7*u + 2*v  
        u = nouveau_u  
        v = nouveau_v  
    return (u, v)
```

On peut aussi écrire
« for i in
range(1,k+1) » ou
« for i in range(0,k) »

Question 5. On calcule v_3 , v_4 et v_5 en itérant l'affirmation 2 (admise), et en tirant parti du fait que l'on connaît la valeur de v_k quel que soit k . On a :

$$\begin{array}{lll} v_3 = 7u_2 + 2v_2 & v_4 = 7u_3 + 2v_3 & v_5 = 7u_4 + 2v_4 \\ = 7 \times 4 + 2 \times 28 & = 7 \times 8 + 2 \times 84 & = 7 \times 16 + 2 \times 224 \\ v_3 = 84. & = 56 + 168 & = 112 + 448 \\ & v_4 = 224. & v_5 = 560. \end{array}$$

Soit :

$$\boxed{v_3 = 84 ; \quad v_4 = 224 ; \quad v_5 = 560.}$$

Question 6. Pour $k \in \mathbf{N}$, on appelle \mathcal{H}_k l'assertion suivante :

$$\mathcal{H}_k : v_k = 7 \times k \times 2^{k-1}.$$

Initialisation : Pour $k = 0$, on a d'une part $v_0 = 0$ d'après la question 2, d'autre part $7 \times 0 \times 2^{0-1} = 0$. Donc \mathcal{H}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que \mathcal{H}_k est vraie pour un certain $k \in \mathbf{N}$.

On a alors :

$$\begin{array}{ll} v_{k+1} = 7u_k + 2v_k & \text{d'après l'affirmation 2} \\ = 7 \times 2^k + 2v_k & \text{d'après la question 3} \\ = 7 \times 2^k + 2 \times 7 \times k \times 2^{k-1} & \text{d'après } \mathcal{H}_k \\ = 7 \times 2^k + 7 \times 2^k \times k & \\ v_{k+1} = 7(k+1)2^{(k+1)-1}. & \end{array}$$

Conclusion : par récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, \mathcal{H}_k est vraie.

En d'autres termes, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}, v_k = 7k2^{k-1}}$.

Question 7.a. Si P est un polynôme de degré 7. Donc il existe

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbf{R}^7$$

avec $a \neq 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$$

Par somme, P est dérivable et sa dérivée est la fonction :

$$P'(x) = 7ax^6 + 6bx^5 + 5cx^4 + 4dx^3 + 3ex^2 + 2fx + g$$

Puisque $a \neq 0$, $7a \neq 0$. Donc $\boxed{P' \text{ est un polynôme de degré 6.}}$

Il eut également été possible de l'écrire avec une somme formelle, pour éviter la répétition.

Question 7.b. Pour $k \in \mathbf{N}$, on appelle \mathcal{S}_k l'assertion suivante :

\mathcal{S}_k : il existe un polynôme P_k de degré au plus égal à k tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_k(x) = P_k(x)e^{2x}$.

Initialisation : Pour $k = 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_0(x) = e^{2x} = 1 \times e^{2x}.$$

Donc \mathcal{H}_0 est vérifiée, avec $P_0 : x \mapsto 1$, qui est un polynôme de degré 1.

Hérédité : Supposons que \mathcal{S}_k est vraie pour un certain $k \in \mathbf{N}$. Il existe un polynôme P_k , de degré au plus égal à k , tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_k(x) = P_k(x)e^{2x}$.

En dérivant le produit, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'_k(x) = P'_k(x)e^{2x} + 2P_k(x)e^{2x} = (2P_k(x) + P'_k(x))e^{2x}.$$

Posons $P_{k+1} : x \mapsto 2P_k(x) + P'_k(x)$. On peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g_{k+1}(x) = P_{k+1}(x)e^{2x}.$$

Il n'est pas nécessairement utile de revenir à l'expression d'un polynôme comme somme de monômes à ce stade.

D'après la question 7.a., P'_k est un polynôme de degré au plus égal à 6. P_k étant un polynôme de degré au plus égal à 6, on en déduit que P_{k+1} est également un polynôme de degré au plus égal à 7.

Donc \mathcal{I}_{k+1} est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, \mathcal{I}_k est vraie.
En d'autres termes,

pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme P_k de degré au plus 7 tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_k(x) = P_k(x)e^{2x}$.

c'est-à-dire que l'affirmation 1 est vraie.

Question 7.c. Soit $k \in \mathbf{N}$.

Il existe un polynôme Q_k , de degré au plus égal à 5, tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P_k(x) = u_k x^7 + v_k x^6 + Q_k(x)$$

On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P'_k(x) = 7u_k x^6 + 6v_k x^5 + Q'_k(x).$$

En dérivant par rapport à x le produit $P_k(x)e^{2x}$, on écrit :

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= g'_k(x) \\ &= P'_k(x)e^{2x} + 2P_k(x)e^{2x} \\ &= (7u_k x^6 + 6v_k x^5 + Q'_k(x)) e^{2x} + 2(u_k x^7 + v_k x^6 + Q_k(x)) e^{2x} \\ &= (2u_k x^7 + (7u_k + 2v_k) x^6 + 6v_k x^5 + 2Q_k(x) + Q'_k(x)) e^{2x} \end{aligned}$$

Or, $g_{k+1}(x) = P_{k+1}(x)e^{2x}$. En simplifiant l'égalité par e^{2x} , qui est toujours positif, on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P_{k+1}(x) = 2u_k x^7 + (7u_k + 2v_k) x^6 + 6v_k x^5 + 2Q_k(x) + Q'_k(x) \quad (1)$$

Or, Q'_k est un polynôme de degré au plus égal à 4, donc

$$x \mapsto 6v_k x^5 + 2Q_k(x) + Q'_k(x)$$

est un polynôme de degré au plus égal à 5.

Les membres de gauche et de droite de l'égalité (1) sont deux polynômes égaux en tout point. Leurs coefficients sont donc égaux.

On pourrait écrire P_k comme étant une somme de sept monômes, et écrire Q_k en fonction. Pour une dernière question de l'exercice, un tel niveau de détail n'est pas forcément nécessaire.

On raisonne par identification. Ce résultat peut être utilisé sans justification en spécialité mathématiques ; il est formulé comme un théorème admis dans le cours de mathématiques expertes et peut être démontré par récurrence sur le degré.

Par conséquent, $2u_k$ est le coefficient de degré 7 de P_{k+1} , et $7u_k + 2v_k$ est le coefficient de degré 6 de P_{k+1} .

En d'autres termes,

$$\boxed{u_{k+1} = 2u_k ; \quad v_{k+1} = 7u_k + 2v_k}$$

ce, pour tout $k \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{l'affirmation 2 est vraie}}$.

Exercice 7

Question 1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle \mathcal{H}_n l'assertion suivante :

$$\mathcal{H}_n : u_n \leq 0.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = a \leq 0$ d'après l'énoncé. Donc \mathcal{H}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que \mathcal{H}_n est vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$. e^{u_n} est un nombre positif.

En outre, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq 0$. Or, la fonction exponentielle est croissante sur \mathbf{R} . Donc $e^{u_n} \leq e^0$. Or, $e^0 = 1$, donc $e^{u_n} \leq 1$, d'où $e^{u_n} - 1 \leq 0$.

Donc, par produit, $e^{u_n} (e^{u_n} - 1) \leq 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 0$.

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, \mathcal{H}_n est vraie.

En d'autres termes, $\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, u_n \leq 0$.

Rédaction alternative :
 $2u_n \leq u_n$, donc par croissance de la fonction exponentielle, $e^{2u_n} \leq e^{u_n}$, d'où $e^{2u_n} - e^{u_n} \leq 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 0$.

Question 2.a. Par définition de la fonction exponentielle, $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbf{R} et a pour dérivée $x \mapsto e^x$.

En outre, $x \mapsto x$ est une fonction linéaire, donc dérivable sur \mathbf{R} , et sa dérivée est la constante $x \mapsto 1$.

Enfin, $x \mapsto 2x$ est une fonction linéaire, donc dérivable sur \mathbf{R} , et sa dérivée est la constante $x \mapsto 2$. Par composition avec la fonction exponentielle, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur \mathbf{R} , et sa dérivée est $x \mapsto 2e^{2x}$.

Donc par somme, la fonction g est dérivable sur \mathbf{R} et sa dérivée vérifie :

$$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1.$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} (e^x - 1)(2e^x + 1) &= 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 \\ &= 2e^{2x} - e^x - 1, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{(e^x - 1)(2e^x + 1) = g'(x).}$$

On aurait pu factoriser le trinôme $2x^2 - x - 1$ pour retrouver nous-mêmes l'écriture de l'énoncé. Mais puisque la réponse est donnée, il suffit de développer.

Question 2.b. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est croissante et s'annule en 0.

En outre, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{2x} > 0$. Donc $e^{2x} + 1 > 0$. On en déduit le signe de g' et les variations de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
$2e^x + 1$	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+
Var. de g			

Les valeurs limites de g ne sont pas demandées, mais il est facile de les calculer.

Or, $g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$.

Donc g admet en 0 un minimum égal à 0.

Question 2.c. On remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) \geq 0$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq u_n$.

En conséquence, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

Question 3.a. D'une part, on a déjà montré que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n).$$

D'autre part, comme indiqué par l'énoncé, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq a > 0$.

Or, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donc $g(u_n) \geq g(a)$.

En conséquence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

Question 3.b. Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle \mathcal{H}_n l'assertion suivante :

$$\mathcal{I}_n : u_n \geq a + ng(a).$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = a = a + 0 \times g(a)$. Donc \mathcal{I}_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que \mathcal{I}_n est vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \geq u_n + g(a).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq a + ng(a)$. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq a + ng(a) + g(a) \\ u_{n+1} &\geq a + (n + 1)g(a). \end{aligned}$$

Donc \mathcal{I}_{n+1} est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, \mathcal{I}_n est vraie.

En d'autres termes, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq a + ng(a)}$.

Question 3.c Justifions tout d'abord que $g(a) > 0$. Par hypothèse, $a > 0$. Or, pour tout $x > 0$, $e^x - 1 > 0$, $2e^x + 1 > 0$, et donc $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Il suit que $g(a) > 0$.

Par conséquent, la suite $(a + ng(a))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite arithmétique de raison $g(a)$, strictement positive. Sa limite est donc $+\infty$.

Aussi, d'après le théorème de limite par minoration,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$$

Il est nécessaire de justifier que $g(a) > 0$ pour pouvoir faire ce raisonnement. Si l'on a seulement $g(a) \geq 0$, alors la suite minorante ne tend pas forcément vers $+\infty$.