# Baccalauréat blanc — Spécialité mathématiques

**1er février 2021, 14 h – 18 h**

## Deuxième partie : analyse

**/20**

***Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.***

***La calculatrice est autorisée dans les conditions prévues par les textes en vigueur. Elle ne peut être utilisée qu'à condition de ne pas disposer de mémoire alphanumérique, ou d'être démarrée dans un mode « examen » rendant impossible l'accès à cette mémoire.***

***Le sujet comporte deux annexes, numérotées C et D, à rendre avec la copie. Ces annexes doivent être détachées du sujet et complétées conformément aux modalités de l'énoncé. Elles doivent être rendues même si elles n'ont pas été complétées.***

## Exercice 5 — 4 points

On étudie les deux fonctions $f : x \longmapsto e^x$ et $g : x \longmapsto e^{-x}$.
Sur l'ANNEXE C À RENDRE AVEC LA COPIE, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives des fonctions $f$ et $g$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on appelle $M_a$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ et $N_a$ le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse $a$.

1. Sur l'ANNEXE C À RENDRE AVEC LA COPIE, placer le point $M_{0,5}$ et le point $N_{0,5}$.
2. On appelle $\mathscr{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $N_a$, et $\mathscr{U}_a$ la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $M_a$.
   - **a.** Déterminer, en fonction de $a$, une équation de $\mathscr{T}_a$ et une équation de $\mathscr{U}_a$.
   - **b.** Donner, en fonction de $a$, un vecteur directeur de $\mathscr{T}_a$ et un vecteur directeur de $\mathscr{U}_a$.
   - **c.** Démontrer que $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{U}_a$ sont perpendiculaires quelle que soit la valeur de $a$.
3. On appelle $P_a$ et $Q_a$ les points respectifs d'intersection de l'axe des abscisses avec $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{U}_a$.
   - **a.** Calculer les coordonnées des points $P_{0,5}$ et $Q_{0,5}$. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$.
   - **b.** Sur l'ANNEXE C À RENDRE AVEC LA COPIE, construire les droites $\mathscr{T}_{0.5}$, $\mathscr{U}_{0,5}$ et placer les points $P_{0,5}$ et $Q_{0,5}$.
   - **c.** Démontrer que la longueur $P_aQ_a$ ne dépend pas de $a$.

# Exercice 6 12,5 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction :

$$f_n : x \longmapsto x^n e^{2x}.$$

## Partie A (5 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction dérivée de $f_n$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} f_n'(x) = 2\ f_0(x) & \text{si } n = 0, \\ f_n'(x) = (2x+n)\ f_{n-1}(x) & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

2. Déterminer le signe de $f_n(x)$ en fonction de $n$ et de $x$.
3. **a.** Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty.$$

   On pourra admettre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

   **b.** En déduire les limites de $f_n$ en $+\infty$ et $-\infty$.

   **c.** La courbe représentative de $f_n$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, donner leur équation.

4. Construire le tableau de variations de $f_n$ dans les cas suivants :

   **a.** $n$ est un nombre naturel pair non-nul.

   **b.** $n$ est un nombre naturel impair.

## Partie B (7,5 points)

Dans cette partie, on fixe $n = 7$.
On définit une famille de fonctions $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant $g_0 = f_7$ et en définissant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_{k+1}$ comme étant la fonction dérivée de $g_k$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_{k+1}(x) = (g_k)'(x).$$

On admet que toutes les fonctions $g_k$ ainsi définies existent et sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_0(x) = x^7\ e^{2x}$$
$$g_1(x) = \left(2x^7 + 7x^6\right)\ e^{2x}$$
$$g_2(x) = \left(4x^7 + 28x^6 + 42x^5\right)\ e^{2x}$$

   On admet provisoirement le résultat suivant :

> **Affirmation 1** — Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe une fonction polynomiale $P_k$, de degré au plus égal à 7, telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$,
>
> $$g_k(x) = P_k(x)\, e^{2x}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on appelle $u_k$ le coefficient de $P_k$ de degré 7, et $v_k$ son coefficient de degré 6.

**2.** Donner les valeurs de $u_0$, $u_1$, $u_2$, $v_0$, $v_1$ et $v_2$.

On admet provisoirement le résultat suivant :

> **Affirmation 2** — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = 2u_k$ et $v_{k+1} = 7u_k + 2v_k$.

**3.** Déterminer la nature et l'expression du terme général de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

L'ANNEXE D À RENDRE AVEC LA COPIE comporte une fonction Python intitulée `calcule_coefficients`.

**4.** Sur l'ANNEXE D À RENDRE AVEC LA COPIE, compléter cette fonction pour qu'elle renvoie les valeurs de $u_k$ et de $v_k$.

**5.** Calculer les valeurs de $v_3$, $v_4$ et $v_5$.

**6.** Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = 7 \times 2^{k-1} \times k.$$

**7.** **a.** Soit $P$ une fonction polynomiale de degré 7. Calculer le degré de la fonction $P'$.

**b.** Démontrer par récurrence l'affirmation 1.

**c.** Démontrer l'affirmation 2.
On pourra écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$P_k(x) = u_k x^7 + v_k x^6 + Q_k(x)$$

avec $Q_k$ de degré au plus égal à 5.
*Le candidat est invité à faire figurer toute trace de réflexion, même non-aboutie, sur sa copie.*

## Exercice 7 — 3,5 points

Soit $a$ un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right).$$

**1.** Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 0$.

2. Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

**a.** Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel $x$ :

$$g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1).$$

**b.** Déterminer les variations de la fonction $g$ et donner la valeur de son minimum.

**c.** En étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite $(u_n)$ étant croissante d'après la question précédente, on peut affirmer que, pour tout entier $n$, $u_n \geqslant a$.

**a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant g(a).$$

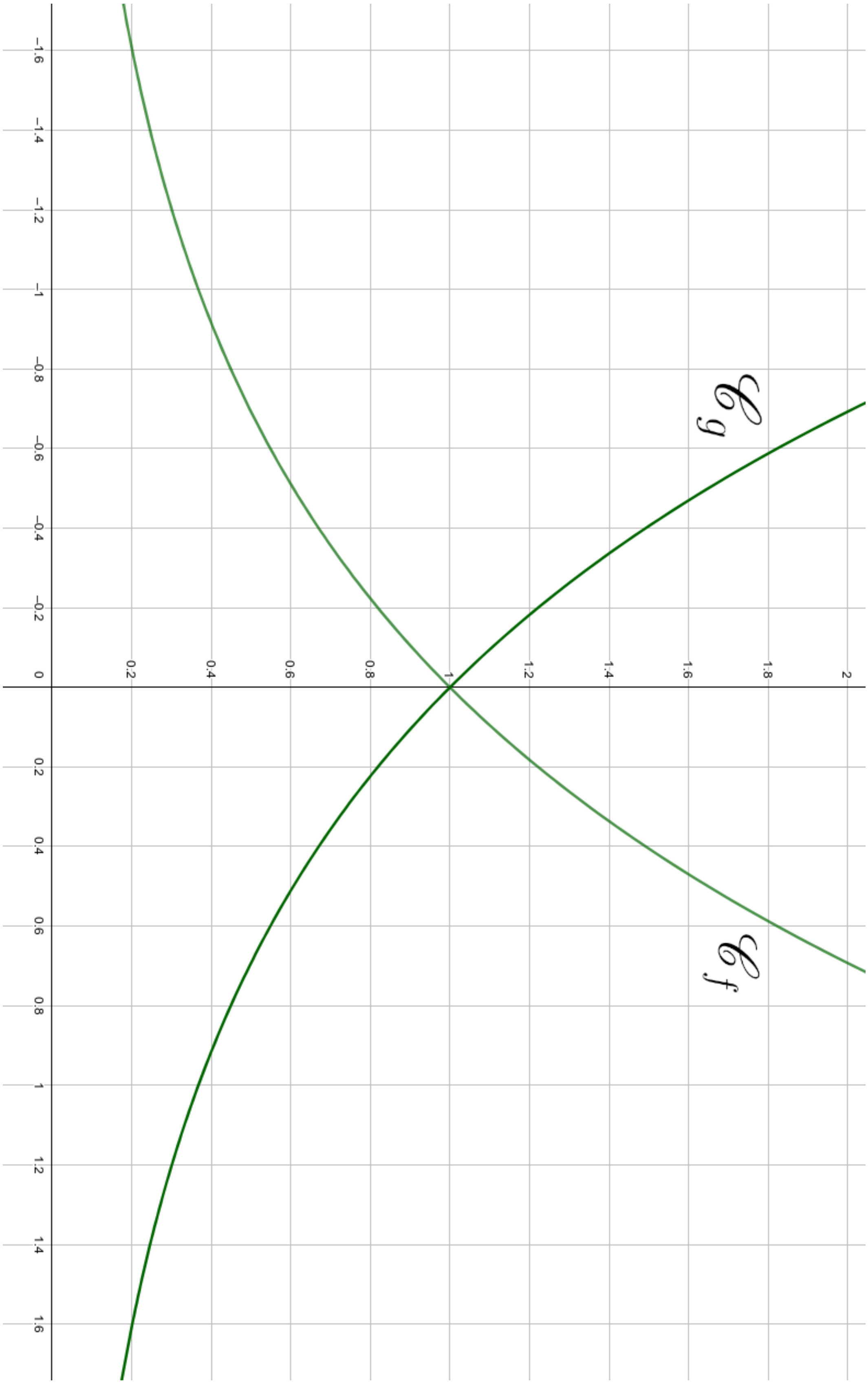
**b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n \geqslant a + n \times g(a).$$

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nom : ................................................ Classe : Terminale .....

# ANNEXE C À RENDRE AVEC LA COPIE (exercice 5)



Nom : .................................................. Classe : Terminale .....

## ANNEXE D À RENDRE AVEC LA COPIE (exercice 6)

```
def calcule_coefficients(k):
    u = ...............
    v = ...............
    for i in range(...............):
        nouveau_u = 2*u
        nouveau_v = ...............
        u = ...............
        v = ...............
    return (u, v)
```