Baccalauréat blanc — Spécialité mathématiques

1er février 2021, 14 h – 18 h

Première partie : géométrie et probabilités

/20

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.

La calculatrice est autorisée dans les conditions prévues par les textes en vigueur. Elle ne peut être utilisée qu'à condition de ne pas disposer de mémoire alphanumérique, ou d'être démarrée dans un mode « examen » rendant impossible l'accès à cette mémoire.

Le sujet comporte deux annexes, numérotées A et B, à rendre avec la copie. Ces annexes doivent être détachées du sujet et complétées conformément aux modalités de l'énoncé. Elles doivent être rendues même si elles n'ont pas été complétées.

Exercice 1 — 5 points

Le tournoi des Six Nations est un tournoi de rugby. Chaque équipe affronte les cinq autres une seule fois. À l'issue des rencontres, les six équipes sont classées, sans égalité possible.

1. Lors d'un match, le stade contenait 80 000 spectateurs, dont 52 000 Français. Il y avait 11 180 Anglaises et 38 700 hommes français.
   Combien d'hommes étaient-ils présents au stade ?
2. Combien de matchs sont-ils disputés lors de ce tournoi ?
3. **a.** Combien de classements différents sont-ils possibles ?

   b. Combien de classements avec la France à la deuxième place sont-ils possibles ?
4. On demande au sélectionneur de l'équipe de France d'assister à une réunion avec les arbitres et cinq de ses joueurs. Il décide d'amener 5 joueurs parmi les 15 qui ont débuté le dernier match.

   a. Combien de groupes de 5 joueurs le sélectionneur peut-il alors composer ?

   b. Il décide d'amener le capitaine de l'équipe. Combien de groupes de 5 joueurs peut-il alors composer ?
5. On a représenté ci-desssous la 15e ligne du triangle de Pascal issue d'une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
15	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	

   a. On saisit « 1 » dans la cellule **A16**. Quelle formule, destinée à être recopiée vers la droite, peut-on saisir dans la cellule **B16** afin d'obtenir la plage de cellule **B16 :P16** ?

   b. Quelle cellule donne-t-elle le résultat de la question 4.a. ?

   c. Pourquoi les cellules **D15** et **L15** ont-elles la même valeur ?

Exercice 2 — 2,5 points

Une plateforme propose deux jeux vidéo : *Assassin's Creed* (A) *Bomberman* (B). On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

— si le joueur achève une partie d'*Assassin's Creed*, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie d'*Assassin's Creed* avec une probabilité de 0,8 ;

— si le joueur achève une partie de *Bomberman*, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de *Bomberman* avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :

— A_n : « la n-ième partie est une partie d'*Assassin's Creed* » ;

— B_n : « la n-ième partie est une partie de *Bomberman* ».

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. **a.** Compléter l'arbre pondéré donné en ANNEXE A À RENDRE AVEC LA COPIE.

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3.$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue à *Assassin's Creed* au cours de la première partie, où a est un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0{,}6$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$a_n = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6.$$

   c. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties d'*Assassin's Creed* et une autre en début des parties de *Bomberman*.
   Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 — 8,5 points

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A (1,5 point)

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

— 96 % de la production journalière est vendable.

— La machine A fournit 60 % de la production journalière.

— La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

— A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

— B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

— V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Partie B (2 points)

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 16 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. L'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %. Quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Partie C (5 points)

Dans le cadre d'une opération commerciale, l'entreprise décide de rajouter des billes « collector », à motif particulier. Dans chaque sachet, la machine remplissant les sachets insère, avec une probabilité p une bille « collector ». On pose pour la suite $q = 1 - p$.
On note C_n l'événement « le n-ième sachet comporte une bille "collector" ». On appelle Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier sachet à contenir une bille « collector ».

1. On s'intéresse dans un premier temps aux trois premiers sachets.
   a. Compléter l'arbre de probabilités figurant en ANNEXE B À RENDRE AVEC LA COPIE.
   b. Sur l'ANNEXE B À RENDRE AVEC LA COPIE, représenter les chemins pour lesquels $Y = 1$, $Y = 2$, $Y = 3$ et $Y > 3$.
2. Que fait la fonction Python suivante ?

```python
def ma_fonction(p):
    C = 0
    while True:
        C = C + 1
        if random.random() < p:
            return C
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'événement $(Y > n)$ à partir des événements $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots,$ et $\overline{C}_n$. En déduire que $P(Y > n) = q^n$.

4. Déterminer la loi de Y.

5. Sarah et Valentin sont deux employés de l'entreprise. Sur leur pause, ils jouent à un jeu, auquel ils parient des capsules de café.

Ils lancent la chaîne de montage, et comptent le nombre de sachets avant que la première bille « collector » ne soit insérée dans un sachet. Si ce sachet est parmi les dix premiers, alors Sarah donne à Valentin un nombre de capsules correspondant au numéro du premier sachet dans lequel la bille a été mise (une capsule si $Y = 1$, deux capsules si $Y = 2$, etc.). Mais si au bout de dix sachets, aucune bille « collector » n'a été délivrée, alors Valentin a perdu : il donne à Sarah trois capsules.

a. On appelle G la variable aléatoire correspondant au nombre de capsules gagnées par Valentin (qui est toujours positif, et nul si Valentin a perdu). Décrire la loi de G.

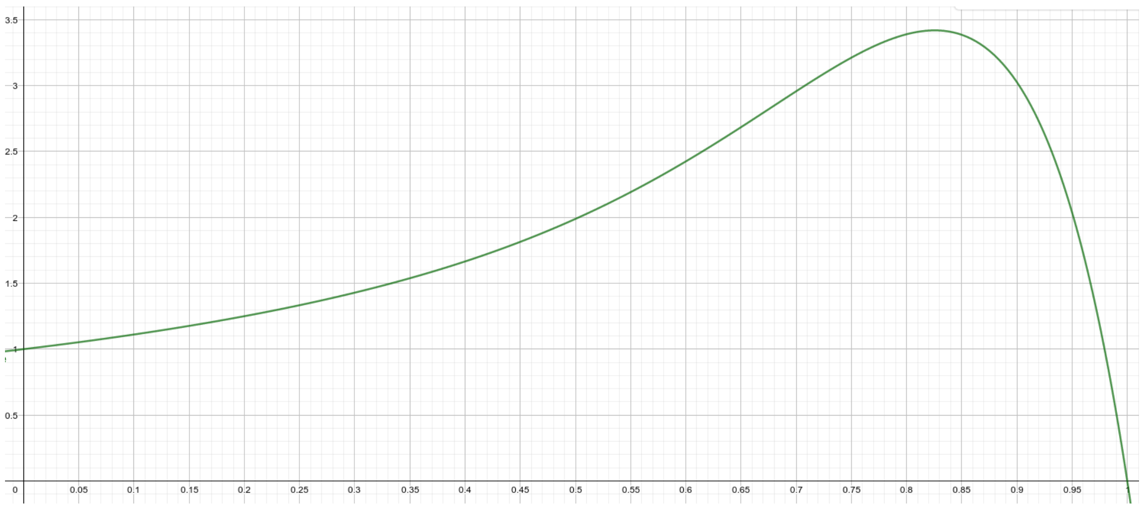
b. Justifier que l'espérance de G est :

$$\mathbf{E}(G) = (1-q) + 2q(1-q) + 3q^2(1-q) + \cdots + 10q^9(1-q).$$

c. En déduire que :

$$\mathbf{E}(G) = \frac{1-q^{10}}{1-q} - 10q^{10}.$$

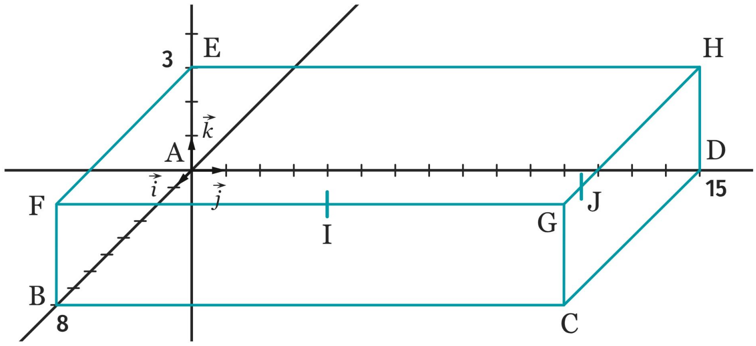
On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x^{10}}{1-x} - 10x^{10}$.



d. Pour quelle plage de valeurs de p Sarah a-t-elle intérêt à proposer à Valentin de jouer à ce jeu ? On arrondira les valeurs données à 10^{-2}.

Exercice 4 — 4 points

L'espace est rapporté au repère $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Dans ce repère, on a tracé le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ comme indiqué sur la figure.

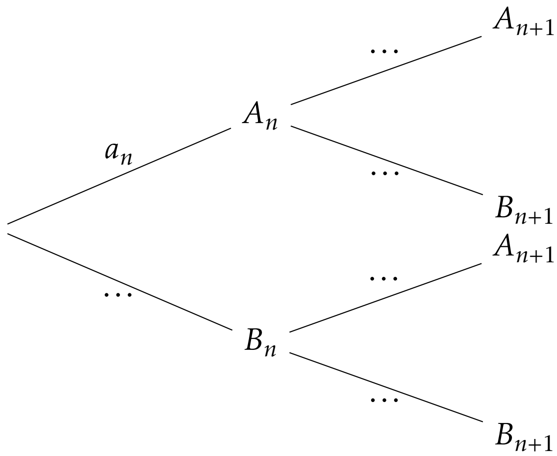


Les points $I(8;8;3)$ et $J(7;15;3)$ sont placés respectivement sur les segments $[FG]$ et $[GH]$.

1. Donner les coordonnées du point C.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par F dont $(\vec{j},\vec{k})$ est un couple de vecteur directeurs. Démontrer que la droite (IJ) appartient à $\mathscr{P}$
4. **a.** Soit K un point de la droite (EF).
   Déterminer les coordonnées de K pour que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ soient coplanaires.
   b. Soit M un point de la droite (EH).
   Déterminer les coordonnées de M pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ soient coplanaires.
   c. Que peut-on dire des plans (IJC) et (AMK) ?
5. Les droites (KD) et (BM) sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ?

Nom : .... Classe : Terminale .....

ANNEXE A À RENDRE AVEC LA COPIE (exercice 2)



ANNEXE B À RENDRE AVEC LA COPIE (exercice 3)