Valentin Melot
17 mai 2021

Devoir surveillé n° 1

Exercice :

1. a. Les fonctions suivantes sont continues sur leur intervalle de définition :

$x \mapsto -x$, car c'est une fonction affine
exp, par définition
$x \mapsto 2-x$, car c'est une fonction affine.
ln, d'après un théorème du cours.

Par composition de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème du point fixe,

$$\ell = f(\ell) = \ln(2 - e^{-\ell}).$$

donc $e^{\ell} = 2 - e^{-\ell}$
donc $e^{\ell} + e^{-\ell} = 2$.

c. $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable comme composée et a pour dérivée $x \mapsto -e^{-x}$.

Par définition, exp est dérivable, et est sa propre dérivée.

Par combinaison linéaire, g a pour dérivée :

$$g' : x \mapsto e^{x} - e^{-x}.$$

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \leq 0 \leq x$. Par croissance de exp sur $\mathbb{R}_+$, il suit que $e^{-x} \leq e^{x}$, donc $g'(x) \geq 0$.

De plus, $g'(x) > 0$ si $x > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
Variations de g.	$g(0)=2.$	$\nearrow$	

e. D'après ce qui précède, la seule solution de $e^{l}+e^{-l}=2$ sur $\mathbb{R}_+$ est $l=0$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. a.

```
def somme(n):
    V = log(2)
    S = V
    for i in range(2, n+1):
        V = log(2 - exp(-V))
        S += V
    return S
```

b. On remarque que lorsque n est multiplié par une constante, S_n augmente approximativement d'une constante. Une telle propriété est vérifiée par les fonctions logarithme. Aussi, on conjecture que $(S_n)_n$ a une croissance logarithmique.

3. a. $u_1 = e^{v_1} = e^{\ln(2)} = 2.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = \exp\left(\ln\left(2 - e^{-v_n}\right)\right)$$
$$= 2 - e^{-v_n}$$
$$= 2 - \frac{1}{e^{v_n}}$$
$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

b. Soit H_n : « $u_n = \frac{n+1}{n}$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, $u_1 = 2 = \frac{1+1}{1}$. Donc H_1 est vraie.

Supposons H_n vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$
$$= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$
$$= 2 - \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{2n + 2 - n}{n+1}$$
$$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

4. a. $v_n = \ln(u_n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln(n).$

b. Par conséquent, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right).$

On remarque que les termes s'annulent (« télescopage »), à l'exception de $\ln(1) = 0$ et de $\ln(n+1)$.

Donc $S_n = \ln(n+1)$.

Rédaction alternative : par récurrence avec l'hypothèse $I_n : S_n = \ln(n+1)$.

Problème : partie A

A. 1.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P_{chauffe}(t) = \frac{1}{R}(T_0 - T_{ext})$
$$= \frac{1}{R}(18 - 10)$$
$$= \frac{8}{R}.$$

Donc Q est de la forme $t \mapsto \frac{8}{R}t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La condition initiale assure que $C = 0$, soit :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad Q(t) = \frac{8t}{R}.$$

2. a. Puisque la fonction cos a pour valeurs extrêmes -1 et 1, T_{ext} vaut dans ce modèle au minimum $2°C$ et au maximum $18°C$.

b. La période d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω est $\frac{2\pi}{\omega}$. On a alors :
$$\frac{2\pi}{\omega} = 86\,400 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{86400} = \frac{\pi}{43200}.$$

c. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$P_{chauffe}(t) = \frac{1}{R}(T_0 - T_{ext}(t))$$
$$= \frac{1}{R}(18 - 10 - 8\cos(\omega t))$$
$$= \frac{8}{R}(1 - \cos(\omega t)).$$

Donc $Q(t)$ est de la forme :

$$Q(t) = \frac{8}{R}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

on a de plus $Q(0) = 0$, soit $C = 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $Q(t) = \frac{8}{R}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$.

d. Il suit que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$Q(t) = \frac{8t}{R}\left(1 - \frac{1}{\omega t}\sin(\omega t)\right).$$

En posant $\varepsilon : t \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{\omega t}\sin(\omega t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a bien $Q(t) = \frac{8t}{R}(1 + \varepsilon(t))$
pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

e. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad -1 \leq \sin(\omega t) \leq 1.$

donc $\quad -\frac{1}{\omega t} \leq \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \leq \frac{1}{\omega t}.$

d'où $\quad -\frac{1}{\omega t} \leq \varepsilon(t) \leq \frac{1}{\omega t}.$

Or, $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\omega t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{\omega t} = 0.$

D'après le théorème de limite par encadrement,

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0.$$

f. ω est choisie telle que
$$180 \times 86400 \times \omega = 180 \times 2\pi.$$

Donc par 2π - périodicité de $\sin$,
$$\sin(180 \times 86400 \times \omega) = \sin(180 \times 2\pi) = \sin(0) = 0.$$
d'où il suit que
$$\varepsilon(180 \times 86400) = 0.$$

3. Soit x le coût en euros. On a :

$$x = Q(180 \times 86400) \times \frac{0,145}{3\,600\,000}$$
$$= \frac{8 \times 180 \times 86400}{R} \times \left(1 + \varepsilon(180 \times 86400)\right) \times \frac{0,145}{3\,600\,000}$$
$$= \frac{8 \times 180 \times 86400 \times 0,145}{0,005 \times 3\,600\,000}$$
$$= 1002,24.$$

Donc le coût annuel du chauffage est de 1000 € environ.

A2 :

1. Soit C le coût annuel du chauffage. On a le tableau de proportionnalité :

$0,005^{-1}$	R^{-1}
1000	C.

Donc $C = \dfrac{1\,000\, R^{-1}}{0,005^{-1}} = \dfrac{1000 \times 0,005}{R} = \dfrac{5}{R}.$

Or, $R(x) = \dfrac{0{,}005}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)$.

Donc $C = \dfrac{1000 \times 0{,}005}{\dfrac{0{,}005}{\ln(10)} \times \ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)} = \dfrac{1000 \ln(10)}{\ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)}$.

b. On appelle p le prix total sur vingt ans.
Ce prix se compose de l'investissement initial et de 20 fois le coût d'une année de chauffe.

Donc p est la fonction $x \mapsto x + \dfrac{20000 \ln(10)}{\ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)}$.

Et l'investissement optimal est un nombre x_{opt} minimisant p sur $]1000, +\infty[$.

2. a. Par définition, $\exp \circ \ln = id$, où $id : x \mapsto x$.
En dérivant chaque membre, il suit :

$$\ln' \times \exp' \circ \ln = id' = 1.$$

$$\ln' \times \exp \circ \ln = 1 \quad \text{par définition de } \exp.$$

$$\ln' \times id = 1.$$

Donc $\ln' = \dfrac{1}{id}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. $x \mapsto x$ a pour dérivée la constante 1.
Par composition, $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)$ a pour dérivée :

$$x \mapsto \frac{1/1000}{x/1000} = \frac{1}{x}.$$

Donc par quotient, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{x}{1000}\right)}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{-1/x}{\ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2}$.

Donc par combinaison linéaire, pour tout $x > 1000$,

$$p'(x) = 1 - \frac{20000 \ln(10)}{x \ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2}.$$

c. Soient $x, y > 1000$ avec $x < y$.
Par croissance de $\ln$,
$$0 < \ln\left(\frac{x}{1000}\right) < \ln\left(\frac{y}{1000}\right).$$
Donc par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,
$$\ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2 < \ln\left(\frac{y}{1000}\right)^2$$

D'où, par produit, $x \ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2 < y \ln\left(\frac{y}{1000}\right)^2$.

Donc, par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{x \ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2} > \dfrac{1}{y \ln\left(\frac{y}{1000}\right)^2}$.

Donc $1 - \dfrac{20000 \ln(10)}{x \ln\left(\frac{x}{1000}\right)^2} < 1 - \dfrac{20000 \ln(10)}{y \ln\left(\frac{y}{1000}\right)^2}$.

Donc p' est strictement croissante sur $]1000, +\infty[$.

3. a. $\lim\limits_{x \to 1000^+} \dfrac{x}{1000} = 1^+$, donc $\lim\limits_{x \to 1000^+} \ln\left(\frac{x}{1000}\right) = 0^+$,

par continuité et stricte croissance de $\ln$.

Donc par opérations sur les limites,

$$\lim_{\substack{x \to 1000 \\ x > 1000}} p'(x) = -\infty.$$

De façon similaire,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{1000}\right) = +\infty, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \to +\infty} p'(x) = 1.$$

x	1000		$+\infty$
Variations de p'	‖	$-\infty \nearrow$	1

b. La fonction $\ln$ est continue sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par opérations sur les fonctions continues, p' est continue sur $]1000, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \to 1000} p'(x) < 0$, $\lim_{x \to +\infty} p'(x) > 0$ et p' est strictement croissante sur $]1000, +\infty[$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]1000, +\infty[$ tel que $p'(\alpha) = 0$.

c. Il suit que p est décroissante sur $]1000, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$. Donc $x_{opt} = \alpha$ est l'unique minimum de la fonction p.

d. À la calculatrice, on trouve

$$p'(9250) \simeq -0{,}006$$
$$p'(9300) \simeq 0{,}004.$$

Donc $x_{opt} = \alpha \simeq 9300$.

Partie B :

B1 :

1. On a d'une part $u' = (CT)' = CT'$ par linéarité de la dérivée.
D'autre part, $u' = \frac{1}{R}(T_{ext} - T)$ d'après l'énoncé. Donc
$$T' = \frac{1}{RC}(T_{ext} - T)$$
soit $$T' + \frac{1}{RC} T = \frac{T_{ext}}{RC}$$
d'où $$T' + \frac{1}{\gamma} T = \frac{T_{ext}}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = RC.$$

2. L'équation homogène associée est :
$$(E_{hom}) \quad T' + \frac{1}{\gamma} T = 0$$
dont les solutions sont $\{t \mapsto k e^{-t/\gamma} : k \in \mathbb{R}\}$.

3. a. Une solution particulière de (E) est la constante $T_{ext} = 10$.
Donc T est solution si et seulement si
$$T' + \frac{1}{\gamma} T = 10/\gamma$$
$$\Leftrightarrow (T - 10)' + \frac{1}{\gamma}(T - 10) = 0$$
$$\Leftrightarrow T - 10 \in S_{hom.}$$
$$\Leftrightarrow T \text{ est de la forme } t \mapsto k e^{-t/\gamma} + 10, \ k \in \mathbb{R}.$$

Si T est une solution vérifiant $T(0) = 18$, alors $10 + k = 18$, soit $k = 8$. Donc
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad T(t) = 10 + 8 e^{-t/\gamma}.$$

b. $\lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{\gamma} = -\infty$, donc par composition

$\lim_{t\to+\infty} e^{-t/\gamma} = 0$, d'où $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 10$.

<u>B2 :</u>

1. a. Supposons que $y : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ soit solution. On a d'une part :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

d'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$y'(t) + \frac{1}{\gamma} y(t) = \frac{T_0}{\gamma}\cos(\omega t).$$

En combinant ces égalités, y est solution

ssi $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) + \frac{A}{\gamma}\cos(\omega t) + \frac{B}{\gamma}\sin(\omega t) = \frac{T_0}{\gamma}\cos(\omega t).$

Donc toute valeur de A et B vérifiant :

$$\begin{cases} -A\omega + \frac{B}{\gamma} = 0 \\ B\omega + \frac{A}{\gamma} = \frac{T_0}{\gamma} \end{cases} \quad (*)$$

convient. Autrement dit, il suffit que (A, B) soit solution de $(*)$ pour que y soit solution de (E_ω).

b. $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{B}{\omega\gamma} \\ B\omega + \frac{B}{\omega\gamma^2} = \frac{T_0}{\gamma} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B/\omega\gamma \\ B = \dfrac{T_0/\gamma}{\omega + \frac{1}{\omega\gamma^2}} = \dfrac{T_0\,\omega\gamma}{\omega^2\gamma^2 + 1}. \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{1+(\omega\gamma)^2}\, T_0 \\ B = \dfrac{\omega\gamma}{1+(\omega\gamma)^2}\, T_0 \end{cases}$$

c. On appelle y la solution particulière précédemment déterminée, soit

$$y : t \longmapsto \frac{1}{1+(\omega\gamma)^2} T_0 \cos(\omega t) + \frac{\omega\gamma}{1+(\omega\gamma)^2} T_0 \sin(\omega t).$$

On a alors :

T est solution de (E)

ssi $T' + \frac{1}{\gamma} T = \frac{T_{ext}}{\gamma} = y' + \frac{1}{\gamma} y$

ssi $T' - y' + \frac{1}{\gamma} T - \frac{1}{\gamma} y = 0$

ssi $(T-y)' + \frac{1}{\gamma}(T-y) = 0$

ssi $T - y \in \mathcal{S}_{hom}$.

ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tq. $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$T(t) = k e^{-t/\gamma} + y(t).$$

Donc les solution de (E_ω) forment l'ensemble :

$$\mathcal{S}_\omega = \left\{ t \mapsto k e^{-t/\gamma} + \frac{T_0}{1+(\omega\gamma)^2} \cos(\omega t) + \frac{\omega\gamma T_0}{1+(\omega\gamma)^2} \sin(\omega t) : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$y(t) = K \cos(\omega t + \varphi(\omega t)) = T_0 G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

b. $$G(\omega) = \frac{K}{T_0} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{T_0} = \frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{T_0^2}{(1+(\omega\gamma)^2)^2} + \frac{\omega^2\gamma^2 T_0^2}{(1+(\omega\gamma)^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{1+(\omega\gamma)^2} \sqrt{1+(\omega\gamma)^2}$$

Donc $\quad G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\gamma)^2}}$.

c. $\gamma = RC$. Donc si R augmente, alors $G(\omega)$ diminue. Autrement dit, une amélioration de l'isolation permet d'atténuer les variations de température survenant à l'intérieur de l'habitation.

Plus précisément, pour R proche de 0, $G(\omega) = 1$, c'est-à-dire que les variations de température intérieure et extérieure sont les mêmes. Et pour $R \rightarrow +\infty$, $G(\omega) \rightarrow 0$: la température dans la maison ne varie alors presque plus.