Devoir surveillé numéro 9 : continuité, trigonométrie, logarithmes, équations différentielles

/30

La calculatrice est autorisée dans les conditions prévues pour les épreuves du baccalauréat.

Exercice (10 points, 35 minutes maximum)

Soit (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_1 = \ln(2) \\ v_{n+1} = \ln(2 - e^{-v_n}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

On admet que cette suite est définie et strictement positive pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

1. On se propose d'étudier d'abord la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

- **a.** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(2 - \mathrm{e}^{-x})$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
- **b.** On admet que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Démontrer que sa limite ℓ est solution de l'équation $e^{\ell} + e^{-\ell} = 2$.
- **c.** On pose $g : x \mapsto e^x + e^{-x}$. Déterminer g'.
- **d.** Donner le signe de g' sur $\mathbf{R}_+$ puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbf{R}_+$.
- **e.** En déduire que $\ell = 0$.

2.

- **a.** Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous, qui calcule et renvoie la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur. On supposera que toutes les fonctions utiles de la bibliothèque `math` ont été importées.

```
def somme(n):
    v = ......
    S = ......
    for i in range(......):
        ......
        ......
    return S
```

- **b.** À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant la démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n). On pourra comparer sa vitesse de croissance avec une fonction de référence connue.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

- **a.** Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. **a.** Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

   b. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Problème (20 points, le reste)

La température d'une maison au cours du temps est notée $T(t)$. La température de l'air extérieur, $T_{ext}(t)$, est supposée connue.
La température de la maison est reliée à son énergie interne U par la formule $U = CT$, où C est une constante appelée *capacité thermique* de la maison.
La maison subit des transferts thermiques avec l'extérieur. La puissance thermique reçue est :

$$P_{ext} = \frac{1}{R}(T_{ext} - T),$$

où R est une constante appelée *résistance thermique* des murs.
La température sera considérée en degrés Celcius (°C). Les autres grandeurs physiques considérées (temps, énergie interne, résistance thermique, capacité thermique) seront étudiées dans les unités du système international (SI), dont il n'y aura donc pas lieu de se préoccuper.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Maison chauffée (13 points)

On d'abord fait l'hypothèse que $T_{ext} < T$.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la température intérieure est fixée à $T_0 = 18$ °C.
Pour maintenir la température constante, on active un chauffage qui fournit une puissance thermique variable $P_{\text{chauffe}}(t)$, vérifiant :

$$P_{\text{chauffe}}(t) = -P_{ext}(t) = \frac{1}{R}(T_0 - T_{ext}(t)).$$

On appelle $Q(t)$ la chaleur totale fournie par le chauffage entre 0 et t. Q est donc la primitive de P_{chauffe} qui vaut 0 en $t = 0$.

A1 : Calcul de la consommation énergétique (5,5 points)

1. On suppose d'abord que la température extérieure est constante à 10 °C. Exprimer $P_{\text{chauffe}}(t)$, puis déterminer la valeur de $Q(t)$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.
2. De façon plus réaliste, on veut modéliser la température à partir d'une fonction sinusoïdale. On pose donc :
$$T_{ext}(t) = 10 + 8\cos(\omega t)$$
avec ω la pulsation des variations de température.
   a. Donner, dans ce modèle, la température extérieure minimale et la température extérieure maximale.
   b. On fixe ω telle que T_{ext} soit périodique de période 86 400 s. Justifier que $\omega = \dfrac{\pi}{43200}$.
   c. Donner l'expression de $Q(t)$.

d. Démontrer que $Q(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$Q(t) = \frac{8t}{R}\left(1+\varepsilon(t)\right).$$

où l'on précisera l'expression de ε.

e. Montrer que ε a une limite nulle en $+\infty$.

f. Quelle est la valeur de $\varepsilon(180 \times 86\,400)$?

3. La période de chauffe s'étend sur 180 jours. Déterminer (à 5 € près) le prix annuel payé pour le chauffage sachant que :

— Dans la formule précédente, t est exprimé en secondes et Q en joules.

— Le prix de l'énergie électrique est de 14,5 centimes d'euro par kilowattheure, avec 1 kWh = 3 600 000 J.

— La résistance thermique de la maison est de $R = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$.

A2 : Travaux d'isolation (7,5 points)

Le propriétaire d'un terrain décide de faire construire sa maison et s'interroge sur l'isolation. L'isolation lui coûte au moins 1 000 €. Il calcule que s'il dépense x euros dans l'isolation (avec $x > 1\,000$), alors il peut obtenir une résistance thermique de :

$$R(x) = \frac{0{,}005}{\ln(10)} \ln\left(\frac{x}{1\,000}\right).$$

Le propriétaire cherche à minimiser le coût de l'isolation et les dépenses de chauffage sur vingt ans. On admet que pour $R = 0{,}005$, le coût annuel du chauffage est de 1 000 €.

1. **a.** Justifier que les dépenses de chauffage pour une année en fonction de x sont :

$$\frac{1\,000 \ln(10)}{\ln\left(\frac{x}{1\,000}\right)}.$$

On pourra admettre que les dépenses de chauffage sont inversement proportionnelles à R.

b. En déduire que l'investissement optimal est un nombre x_{opt} qui minimise la fonction :

$$p : x \longmapsto x + \frac{20\,000 \times \ln(10)}{\ln\left(\frac{x}{1\,000}\right)}$$

2. **a.** (Question de cours.) On admet que ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.

b. Démontrer que la dérivée de la fonction p sur $]1\,000, +\infty[$ est la fonction :

$$p' : x \longmapsto 1 - \frac{20\,000 \ln(10)}{x\left(\ln\left(\frac{x}{1\,000}\right)\right)^2}.$$

c. Sans calculer p'', démontrer que p' est strictement croissante sur $]1\,000, +\infty[$.

3. **a.** Déterminer la limite à gauche de p' en 1 000 et sa limite en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de p' sur l'intervalle $]1\,000, +\infty[$.

b. Montrer qu'il existe un unique nombre $\alpha \in]1\,000, +\infty[$ qui annule la fonction p'. *On pourra admettre la continuité de p' sur cet intervalle.*

c. En déduire qu'il existe un unique nombre x_{opt} qui minimise la fonction p sur l'intervalle $]1\,000, +\infty[$.

d. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de x_{opt} à 100 € près.

Partie B : Maison sans chauffage (7 points)

On supprime le chauffage à l'intérieur de la maison. Puisqu'elle ne reçoit aucun autre transfert thermique que celui venu de l'extérieur, l'énergie interne de la maison vérifie :

$$U' = P_{ext} = \frac{1}{R}(T_{ext} - T).$$

On rappelle par ailleurs que $U = CT$ où C est une constante.

B1 : Modélisation par une équation différentielle (3,5 points)

1. Justifier que la fonction T vérifie l'équation différentielle suivante :
$$T' + \frac{1}{\gamma}T = \frac{T_{ext}}{\gamma}, \qquad \text{(E)}$$
où γ est un réel à déterminer.
2. Donner l'équation homogène, c'est-à-dire sans le second membre, ($\mathrm{E_{hom}}$) associée à (E), puis déterminer son ensemble de solutions $\mathscr{S}_{\text{hom}}$.
3. On suppose dans un premier temps que la température extérieure est constante à 10 °C, et que la température intérieure de la maison pour $t = 0$ est de 18 °C.
   - **a.** Résoudre (E).
   - **b.** Démontrer que la température de la maison tend vers 10 °C.

B2 : Étude en régime sinusoïdal (3,5 points)

Dans cette partie, on suppose que T_{ext} est la fonction $t \longmapsto T_0 \cos(\omega t)$. L'équation (E) s'écrit donc :

$$T' + \frac{1}{\gamma}T = \frac{T_0}{\gamma}\cos(\omega t) \qquad (\mathrm{E}_\omega)$$

1. On souhaite déterminer une solution particulière de (E_ω) sous la forme
$$t \longmapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$
avec A et B des constantes à déterminer.
   - **a.** Justifier que l'on peut choisir des réels A et B solutions du système :
   $$\begin{cases} \dfrac{A}{\gamma} + B\omega = \frac{T_0}{\gamma} \\ -A\omega + \dfrac{B}{\gamma} = 0. \end{cases}$$
   - **b.** Montrer que la solution du système précédent est :
   $$A = \frac{T_0}{1 + (\omega\gamma)^2} \ ; \quad B = \frac{\omega\gamma T_0}{1 + (\omega\gamma)^2}.$$
   - **c.** Exprimer l'ensemble des solutions de (E_ω).
2. (Bonus, 3 points.) On admet que la solution particulière précédemment déterminée est une sinusoïde d'amplitude $K = \sqrt{A^2 + B^2}$ et de déphasage $\varphi(\omega)$ que l'on ne cherchera pas à calculer. On appelle $G(\omega)$ le nombre :
$$G(\omega) = \frac{K}{T_0},$$
c'est-à-dire que $G(\omega)$ désigne l'atténuation des variations de température à l'intérieur de la maison par rapport à l'extérieur.
   - **a.** Exprimer la solution particulière précédemment calculée en fonction de T_0, $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.
   - **b.** Démontrer que :
   $$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\gamma^2}}.$$
   - **c.** ω étant fixé, quel est l'effet d'une variation de R sur $G(\omega)$? Interpréter dans le contexte de l'exercice.