DST 8 - 1 heure 15
Convexité - Orthogonalité dans l'espace

/20

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.
La calculatrice est autorisée conformément à la règlementation.

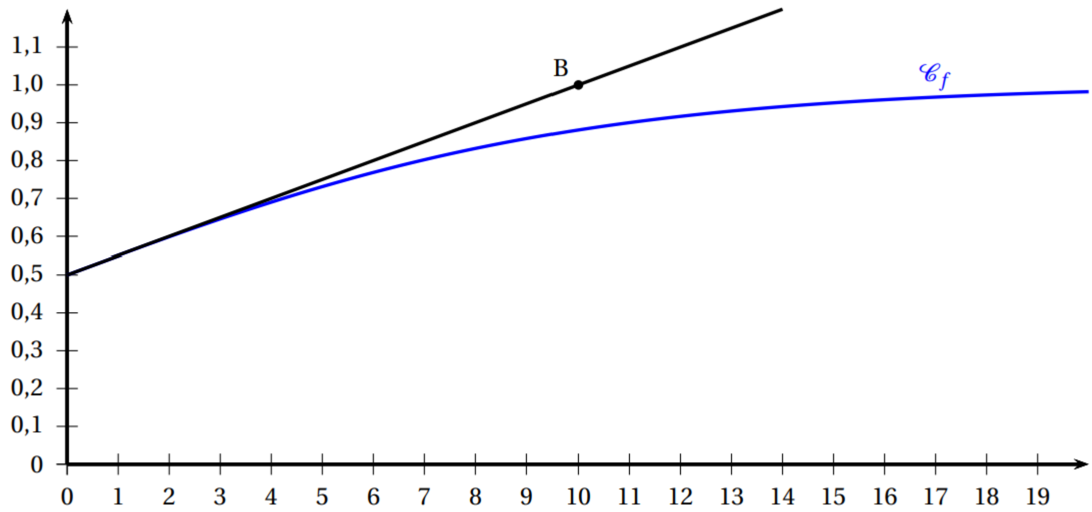
Exercice 1 — 7 points

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A$(0\,;\,0{,}5)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $B(10\,;\,1)$.



1. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
   $$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$
3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés le 1er juillet 2003.

1. Quelle est, selon ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? *On en donnera une valeur arrondie au centième.*
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. En quelle année la proportion d'individus équipés dépasse-t-elle 95 % ?
4. **a.** Déterminer $p''(x)$ pour tout réel x.
   b. Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier.

Exercice 2 — 7 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et $C(3\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$, puis en donner une valeur arrondie au degré près.
3. Démontrer qu'il existe un unique point G de l'espace tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et déterminer ses coordonnées.
4. **a.** Vérifier que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   b. Que peut-on en déduire pour le point G ?
5. Soit $S(1\ ;\ -3\ ;\ -1)$.
   a. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{GS}$ et du plan (ABC) ?
   b. En déduire que G est le projeté orthogonal de S sur la droite (AB).
6. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 13.$$

   a. En utilisant le point G dans l'égalité caractérisant l'ensemble $\mathscr{E}$, démontrer que

$$M \in \mathscr{E} \iff GM = 1.$$

   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 3 (problème) 6 points

Pour tous réels strictement positifs x et y, on appelle *moyenne géométrique* de x et y le nombre $\sqrt{xy}$, et *moyenne arithmétique* de x et y le nombre $\frac{x+y}{2}$.

1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. On admet qu'il existe des réels X et Y tels que $x = e^X$ et $y = e^Y$.

- **a.** Justifier que $e^{\frac{X+Y}{2}} \leq \frac{e^X + e^Y}{2}$.
- **b.** En déduire que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. *On rappelle que pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha^{1/2} = \sqrt{\alpha}$.

On fixe désormais deux réels x_0 et y_0 strictement positifs tels que $x_0 < y_0$. On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

On admet provisoirement l'affirmation suivante :

> **Affirmation 1** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
>
> $$x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0.$$

2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent chacune une limite, que l'on note respectivement α et β.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = y_n - x_n$.

- **a.** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} \leq \frac{c_n}{2}$.
- **b.** En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \leq \frac{y_0 - x_0}{2^n}$.
- **c.** En déduire que $\alpha = \beta$.

On appelle le nombre $\alpha = \beta$ la *moyenne arithmético-géométrique* de x et y.

4. Dans un tableur, on saisit un nombre dans la case **A1** et un nombre dans la case **B1**. Quelles formules peut-on inscrire dans les cases **A2** et **B2** et faire glisser vers le bas pour obtenir rapidement les valeurs des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

En saisissant ces formules dans un tableau, et en essayant différentes valeurs d'initialisation, on observe les rendus suivants :

	A	B
1	1	2
2	1,414213562	1,5
3	1,456475315	1,457106781
4	1,456791014	1,456791048
5	1,456791031	1,456791031

	A	B
1	2	7
2	3,741657387	4,5
3	4,1033472	4,120828693
4	4,112078657	4,112087946
5	4,112083302	4,112083302

	A	B
1	10	100
2	31,6227766	55
3	41,70434885	43,3113883
4	42,50027349	42,50786858
5	42,50407086	42,50407103

5. Quels constats peut-on faire s'agissant de la vitesse de convergence des suites, au vu notamment des résultats de la question 3.b ?

6. [Bonus : 2 points] Démontrer par récurrence l'affirmation 1.
Toute trace de réflexion, même non aboutie, sera valorisée.