Valentin Melot
27 jan. 2020

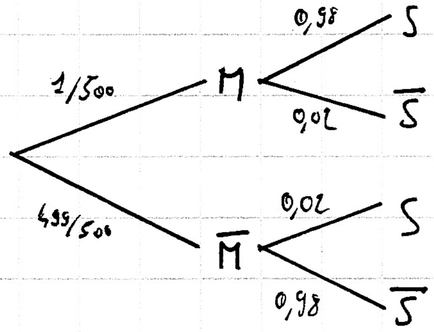
# DS n°6 : corrigé

## Exercice 1 : voir cours

## Exercice 2 :

### Partie A :

1. D'après l'énoncé,
$$P(M) = \frac{1}{500} \; ; \quad P_M(S) = 0{,}98 \; ; \quad P_{\overline{M}}(S) = 0{,}02.$$

2. 


3. $\{M, \overline{M}\}$ est une partition de l'univers, donc

$$\begin{aligned} P(S) &= P(M \cap S) + P(\overline{M} \cap S) \\ &= P(M)\, P_M(S) + P(\overline{M})\, P_{\overline{M}}(S) \\ &= \frac{0{,}98}{500} + 0{,}02 \times \frac{499}{500} \end{aligned}$$

$$P(S) = 0{,}02192$$

4. $P(S) \neq 0$, donc par définition de la probabilité conditionnelle,

$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}$$

(Nota : cette égalité s'appelle formule de Bayes.)

$$= \frac{P_M(S)\ P(M)}{P(S)}$$

$$= \frac{0{,}98 \times \frac{1}{500}}{0{,}02192}$$

$$P_S(M) \approx 0{,}089 \quad (\text{à } 10^{-3})$$

Partie B :

1. Pour chaque voyageur, on réalise une épreuve aléatoire à deux issues, dont le succès correspond au fait que le portique sonne (probabilité 0,02192).

Cette expérience est reproduite 80 fois.

Les expériences sont identiques et on peut les supposer indépendantes (la détention, par un voyageur, d'un objet métallique n'influence pas la détention d'un tel objet par les autres voyageurs).

On a donc affaire à un schéma de Bernoulli, dont le nombre de succès est compté par la variable aléatoire X.

Par conséquent, X suit une loi binomiale de paramètres 80 et 0,02192, soit :

$$X \sim \mathcal{B}(80\ ;\ 0.02192)$$

2. D'après le cours,

$$E[X] = 80 \times 0.02192$$

$$= 1{,}7536$$

Autrement dit, si ce schéma de Bernoulli est répété un grand nombre de fois, il y aura en moyenne 1,7536 voyageurs qui sonneront au portique.

3. (a) À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= \mathbb{P}(\overline{X=0}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X=0) \\ &\approx 1 - (1-0{,}02192)^{80} \\ &\approx 0{,}830 \quad (\text{à } 10^{-3}) \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{X \geq 5}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) \\ &\approx 1 - 0{,}9685 \\ &\approx 0{,}031 \quad (\text{à } 10^{-3}). \end{aligned}$$

4. On remarque que :

$\mathbb{P}(X \leq 2) \approx 0{,}744$

$\mathbb{P}(X \leq 3) \approx 0{,}901$.

Or, la fonction $k \longmapsto \mathbb{P}(X \leq k)$ est croissante.

Donc le plus petit entier $k$ tel que $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0{,}90$ est $k = 3$.

Exercice n° 3 :

```
def cinq_titres():
    L = []
    for i in range(5):
        if random.randint(1, 457) <= 261 :
            L.append("Métal")
        else:
            L.append("Électro")
    return L
```

Exercice n° 4 :

1. (a) Chacune des 20 questions constitue une épreuve aléatoire dont le succès correspond au fait qu'Anselme réponde correctement (ce qui survient avec une probabilité de 0,25).

Ces vingt épreuves sont identiques et indépendantes.

On a donc affaire à un schéma de Bernoulli, dont le nombre de succès est compté par la variable aléatoire X.

Donc $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0{,}25)$.

(b) $P(X \geqslant 10) = 1 - P(\overline{X \geqslant 10})$

$= 1 - P(X < 10)$

$= 1 - P(X \leqslant 9)$

$\approx 1 - 0{,}9861$

$\approx 0{,}014$ (à $10^{-3}$)

Attention à l'erreur d'arrondi !

(c) $\mathbb{P}(8 \leq X \leq 12) = \mathbb{P}((X \leq 12) \text{ et } (8 \leq X))$
$= \mathbb{P}((X \leq 12) \text{ et } \overline{(8 > X)})$
$= \mathbb{P}(X \leq 12 \text{ et } \overline{(7 \geq X)})$
$= \mathbb{P}(X \leq 12) - \mathbb{P}(X \leq 7)$
$\approx 0,102.$

Nota : il est également possible de rédiger le calcul de $\mathbb{P}(M)$ avec un arbre.

2. Notons $A$, $B$ et $C$ les évènements respectifs « la copie choisie est celle d'Anselme », « de Barbara » et « de Camille ».
Notons par ailleurs $M$ : « le candidat a la moyenne ».

On cherche : $\mathbb{P}_M(B)$.
$\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers, donc

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(A \cap M) + \mathbb{P}(B \cap M) + \mathbb{P}(C \cap M)$$
$$= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(M) + \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(M) + \mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}_C(M)$$
$$= \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(X \geq 10) + \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(Y \geq 10) + \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(Z \geq 10).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}_M(B) = \frac{\mathbb{P}(M \cap B)}{\mathbb{P}(M)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(M)}{\frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(X \geq 10) + \mathbb{P}(Y \geq 10) + \mathbb{P}(Z \geq 10)\right)}$$
$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\,\mathbb{P}(Y \geq 10)}{\cancel{\frac{1}{3}}\left(\mathbb{P}(X \geq 10) + \mathbb{P}(Y \geq 10) + \mathbb{P}(Z \geq 10)\right)}$$

$$\mathbb{P}_M(B) \approx 0,376.$$

Exercice n°5 :

Partie A :

1. Appelons $B_i$ l'évènement « la i-ième boule tirée est blanche ».

Le tirage étant indépendant, $B_1$ et $B_2$ ainsi que leurs évènements respectifs contraires sont indépendants.

On a : $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{3}{10}$.

Soit $G$ l'évènement « le joueur gagne la partie ».

On remarque que

$$G = (B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)$$

avec $B_1 \cap \overline{B_2}$ et $\overline{B_1} \cap B_2$ incompatibles.

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}(B_2) \quad \text{par indépendance.} \\ &= \frac{3}{10}\left(1 - \frac{3}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \frac{3}{10} \\ &= 2 \times \frac{3 \times 7}{100}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(G) = \frac{42}{100}.$$

2. (a) Chaque partie constitue une expérience à deux issues, dont le succès consiste à gagner la partie

Cette expérience est répétée $n$ fois de façon identique et indépendante.

$X_n$ compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, donc :

$$X_n \sim \mathcal{B}(n\,;\,0{,}42)$$

(b) $$p_n = \mathbb{P}(X \geq 1)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\overline{X \geq 1})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X = 0)$$
$$p_n = 1 - (1-p)^n$$

Donc $p_{10} = 1 - (1-p)^{10} \approx 0,996.$

(c) On cherche le plus petit $n$ tel que $p_n \geq 0,99$, c'est-à-dire tel que $(1-p)^n \leq 0,01$.

La suite $((1-p)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En outre, $(1-p)^8 \approx 0,013$ et $(1-p)^9 \approx 0,007$.

Donc le nombre recherché est $n = 9$.

C'est-à-dire que le nombre minimal de parties à jouer pour avoir 99% de chances de gagner au moins une fois est 9.

Partie B :

1.(a) De même qu'à la question 1 de la partie A, en notant $B_i$ l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche », on a :

$$\mathbb{P}(Y_k = 5) = \mathbb{P}((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2))$$
(par indépendance) $$= \mathbb{P}(B_1)(1 - \mathbb{P}(B_2)) + (1 - \mathbb{P}(B_1))\,\mathbb{P}(B_2).$$

Or, à chaque tirage, réalisé en équiprobabilité trois boules sont blanches parmi les $k+3$ boules de l'urne. Donc $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{k}{k+3}$.

On en déduit donc :

$$\mathbb{P}(Y_k = 5) = \frac{k}{k+3}\left(1 - \frac{k}{k+3}\right) + \left(1 - \frac{k}{k+3}\right)\frac{k}{k+3}$$

$$= 2 \times \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3}.$$

$$\mathbb{P}(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

(b) De la même façon, on calcule :

$$\mathbb{P}(Y_k = -9) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$
$$= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2) \quad \text{(par indépendance)}$$
$$= \frac{3^2}{(k+3)^2}.$$

Et :

$$\mathbb{P}(Y_k = -1) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$
$$= \mathbb{P}(\overline{B_1})\,\mathbb{P}(\overline{B_2}) \quad \text{(par indépendance)}$$
$$= (1 - \mathbb{P}(B_1))(1 - \mathbb{P}(B_2))$$
$$= \frac{k^2}{(k+3)^2}.$$

La loi de $Y_k$ est donc :

(La présentation sous forme d'un tableau n'est pas obligatoire.)

| $x$ | $-9$ | $-1$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y_k = x)$ | $\frac{9}{(k+3)^2}$ | $\frac{k^2}{(k+3)^2}$ | $\frac{6k}{(k+3)^2}$. |

2. (a) $E[Y_k] = -9\,\mathbb{P}(Y_k = -9) - \mathbb{P}(Y_k = -1) + 5\,\mathbb{P}(Y_k = 5)$
d'après la formule de transfert.

Donc :

$$\mathbb{E}[Y_k] = \frac{1}{(k+3)^2}\left(-81 - k^2 + 30k\right).$$

On remarque que $k=3$ est une racine du trinôme $-k^2+30k-81$. Le produit de ses racines étant égal à $81$, on en déduit que :

$$\mathbb{E}[Y_k] = -\frac{(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}.$$

Le jeu est favorable si et seulement si $3 < k < 27$, c'est-à-dire

$$4 \leq k \leq 26.$$

(b) D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$V(Y_k) = \mathbb{E}[Y_k^2] - \mathbb{E}[Y_k]^2.$$

Or, la loi de $Y_k^2$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(Y_k^2 = 1) = \frac{k^2}{(k+3)^2} \quad ; \quad \mathbb{P}(Y_k^2 = 25) = \frac{6k}{(k+3)^2} \quad ;$$

$$\mathbb{P}(Y_k^2 = 81) = \frac{9}{(k+3)^2}.$$

Donc : $\mathbb{E}[Y_k^2] = \frac{1}{(k+3)^2}\left(k^2 + 150k + 729\right).$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[Y_k]^2 = \frac{1}{(k+3)^4}\left(-k^2 + 30k - 81\right)^2$$

$$\mathbb{E}[Y_k^2] = \frac{1}{(k+3)^4}\left[k^4 + 900k^2 + 6561 - 60k^3 + 162k^2 - 4860k\right]$$

$$= \frac{1}{(k+3)^4}\left[k^4 - 60k^3 + 1062k^2 - 4860k + 6561\right]$$

Donc :

$$V(Y_k) = \frac{1}{(k+3)^4}\left[(k+3)^2(k^2 + 150k + 729) - k^4 + 60k^3 - 1062k^2 + 4860k - 6561\right]$$

Développons le produit suivant :

$$(k+3)^2(k^2 + 150k + 729)$$
$$= (k^2 + 6k + 9)(k^2 + 150k + 729)$$
$$= k^4 + 150k^3 + 729k^2 + 6k^3 + 900k^2 + 4374k + 9k^2$$
$$+ 1350k + 6561$$
$$= k^4 + 156k^3 + \text{[illegible]}8k^2 + 5724k + 6561.$$

On en déduit que :

$$V(Y_k) = \frac{1}{(k+3)^4}\left[216k^3 + 576k^2 + 10584\right]$$

$$= \frac{72k}{(k+3)^4}(3k^2 + 8k + 147)$$

Et donc :

$$\sigma(Y_k) = \sqrt{V(Y_k)} = \frac{6\sqrt{2k}}{(k+3)^2}\sqrt{3k^2 + 8k + 147}$$

## Exercice n° 6 :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x+1}} = e^{-1}.$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{e} \neq 1.$

(En revanche, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(f(x))$.)

$f$ et $g$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

2. $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x(x^2+3)}{5x^3+3x-2} = \frac{5x^3+15x}{5x^3+3x-2}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} (5x^3+3x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} 5x^3+15x = 0$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(Elles sont en revanche équivalentes au voisinage de $+\infty$.)

$f$ et $g$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $0$.

## Exercice n°7 :

1. On remarque que, si l'on pose $P(x) = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$

$$f(x) = \frac{x^3}{P(x)}\left[a(x+\beta)(x+\gamma) + b(x+\alpha)(x+\gamma) + c(x+\alpha)(x+\beta)\right]$$

$$= \frac{x^3}{P(x)}\Big[x^2(a+b+c) + x\big(a(\beta+\gamma) + b(\alpha+\gamma) + c(\alpha+\beta)\big) + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta\Big]$$

$$= \frac{x^3}{P(x)}\left[x^2(a+b+c) + x(-a\alpha - b\beta - c\gamma) + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta\right]$$

Or, $P$ est un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant égal à 1. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{P(x)} = 1.$$

Autrement dit, $f$ a la même limite en $+\infty$

que le polynôme

$$G : x \mapsto x^2(a+b+c) - x(a\alpha + b\beta + c\gamma) + a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta.$$

Cette limite est nulle
ssi $G$ est un polynôme constant
ssi les termes de degré 1 et 2 de $G$ sont nuls
ssi $\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \end{cases}$

2. (a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$. Donc

$G$ est le polynôme nul, et vérifie en plus des conditions précédentes :

$$a\beta\gamma + c\alpha\beta + b\alpha\gamma = 0.$$

(b) Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $(a, b, c)$ est solution du système : $\Sigma : \begin{cases} a+b+c = 0 & (L_1) \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 & (L_2) \\ a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0 & (L_3). \end{cases}$

On résout le système :

$$\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 & (L_1) \\ (\beta - \alpha)b + (\gamma - \alpha)c = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1) \\ (\alpha - \beta)\gamma b + (\alpha - \gamma)\beta c = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \beta\gamma L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 & (L_1) \\ (\beta - \alpha) b + (\gamma - \alpha) c = 0 & (L_2) \\ [(\alpha - \gamma)\beta + (\gamma - \alpha)\gamma] c = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + \gamma L_2) \end{cases}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)\beta + (\gamma-\alpha)\gamma \\ =\ & \alpha\beta + \gamma(-\beta+\gamma-\alpha) \\ =\ & \alpha\beta + 2\gamma^2.\end{aligned}$$

Parmi $\alpha, \beta$ et $\gamma$, deux au moins ont même signe. ~~Donc~~ quitte à permuter les variables, on peut supposer $\alpha$ et $\beta$ de même signe.

En ce cas, sachant qu'au plus une des trois variables $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ est nulle, $\alpha\beta + 2\gamma^2 > 0$.

$$\text{Donc } \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ (\beta-\alpha) b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha\beta+2\gamma^2} L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{\beta-\alpha} L_2.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \iff a = b = c = 0$.

3. D'après ce qui a été dit précédemment,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \left( \frac{\beta-\gamma}{x+\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{x+\beta} + \frac{\alpha-\beta}{x+\gamma} \right)$$

$$= (\beta-\gamma)\beta\gamma + (\gamma-\alpha)\alpha\gamma + (\alpha-\beta)\alpha\beta.$$

Pour exprimer cette limite $L$ de façon plus condensée, on peut par exemple remplacer chaque occurrence de $\gamma$ par $-\alpha-\beta$. En développant et en factorisant, on observe par exemple que :

$$\begin{aligned} L &= (2\beta+\alpha)\beta(-\alpha-\beta) + (-\beta-2\alpha)\alpha(-\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)\alpha\beta \\ &= 2\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - 2\beta^3 \\ &= 2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) + 3(\alpha-\beta)\alpha\beta \\ &= (\alpha-\beta)\left(2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta\right) \\ &= (\alpha-\beta)(2\gamma^2+\alpha\beta). \end{aligned}$$

De façon similaire, on démontre que

$$L = (\beta-\gamma)(2\alpha^2+\beta\gamma) = (\gamma-\alpha)(2\beta^2+\alpha\gamma)$$

Le même argument qu'à la question précédente assure notamment que $L \neq 0$.