DST 6 - 2 heures

/22

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.
La calculatrice est autorisée dans les conditions prévues pour les épreuves du baccalauréat.

Exercice 1 Question de cours — 3 points

Démontrer la propriété suivante :
Soient un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et k un entier naturel inférieur ou égal à n. La probabilité d'obtenir exactement k succès parmi n épreuves identiques et indépendantes est égale à $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Exercice 2 — 4,5 points

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent enporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » et M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :

— lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, que la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;

— lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, que la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02.

PARTIE A

1. A l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(S)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(S) = 0{,}02192$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

PARTIE B

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique parmi les 80 personnes de ce groupe.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. À l'aide de la calculatrice et en justifiant les calculs, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :
   a. la probabilité qu'au moins une personne fasse sonner le portique ;
   b. la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
4. Donner la valeur du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

Exercice 3 — 2 points

Dans son téléphone, Naïma a 457 titres classés en deux catégories : 261 « métal » et 196 « électro ».
La lecture est aléatoire. On considère l'épreuve consistant à jouer un titre et à regarder s'il est « métal » ou « électro ».
Le mode aléatoire joue les titres totalement aléatoirement (donc il peut jouer un titre deux fois de suite).
Recopier la fonction Python ci-dessous et la compléter afin qu'elle simule cette succession de cinq épreuves et mette les catégories des titres simulés dans une liste qu'elle renvoie.

```
def cinq_titres():
    L=[]
    for i in range(......):
        if random.randint(1, 457) <= ......:
            L.append("Métal")
        else:
            L.append("......")
    return ......
```

Exercice 4 — 2,5 points

Un QCM a 20 questions avec une seule réponse correcte parmi quatre propositions. Le candidat gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si la réponse est fausse. On considère trois candidats :

— Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions ;

— Barbara est un peu mieux préparée : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;

— Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable X ? Justifier.

b. A l'aide de la calculatrice et en justifiant les calculs, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

c. Quelle est la probabilité qu'Anselme obtienne une note comprise entre 8 et 12 (8 et 12 inclus) ?

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geqslant 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geqslant 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard et de façon équiprobable la copie d'un de ces trois candidats. On constate, après l'avoir corrigée, que la copie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ? Arrondir au millième.

Exercice 5 5 points

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et trois boules blanches.
Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit les règles de jeu suivantes :

— un joueur perd 9 € si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;

— un joueur perd 1 € si les deux boules tirées sont de couleur noire ;

— un joueur gagne 5 € si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas-là qu'il gagne la partie.

PARTIE A

Dans cette partie, on pose $k = 7$. Ainsi l'urne contient trois boules blanches et sept boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0{,}42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes. On note X_n la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   - **a.** Expliquer pourquoi la variable X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   - **b.** Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   - **c.** Déterminer le nombre minimal de parties auxquelles le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

PARTIE B

Dans cette partie, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. **a.** Justifier l'égalité $P(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   b. Ecrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.
2. **a.** On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k. On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.
   b. Déterminer l'écart type de la variable aléatoire Y_k en fonction de k.

Exercice 6 — 2 points

Définition

f et g sont deux fonctions et a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Dire que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a signifie que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note $f \underset{a}{\sim} g$.

1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = e^{2x+1}$.
   Les fonctions f et g sont-elles équivalentes en $+\infty$?
2. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x$ et $g(x) = \dfrac{5x^3 + 3x - 2}{x^2 + 3}$.
   Les fonctions f et g sont-elles équivalentes en 0 ?

Exercice 7 — 3 points

Soient α, β et γ trois réels distincts tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et a, b et c trois réels.
f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax^3}{x+\alpha} + \frac{bx^3}{x+\beta} + \frac{cx^3}{x+\gamma}$$

pour tout réel x différent de $-\alpha$, $-\beta$ et $-\gamma$.

1. Montrer que la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

$$a + b + c = 0 \text{ et } a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

2. **a.** Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors $a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ si et seulement si $a = b = c = 0$.
3. Démontrer que :

$$\lim_{X \to +\infty} x^3 \left(\frac{\beta - \gamma}{x + \alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{x + \beta} + \frac{\alpha - \beta}{x + \gamma} \right) = (\alpha - \beta)\left(2\gamma^2 + \alpha\beta\right)$$