Devoir surveillé numéro 5 : limites de fonctions

Lycée N. D. de la Providence – Terminales spé maths

11 janvier 2020 – 1 h

L'usage de la calculatrice est autorisé selon la règlementation applicable aux épreuves du baccalauréat.

Question de cours (4 pts, 5 minutes)

Énoncer puis démontrer le théorème de croissance comparée exponentielle-puissance[1]. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

Exercice n° 1 (10 pts, 30 minutes)

Calculer, en justifiant soigneusement, les limites suivantes. On indiquera les transformations effectuées, ainsi que les limites de référence et les théorèmes utilisés.

$$A = \lim_{x \to -\infty} 2x^2 + 3 \qquad B = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{6x-1}$$

$$C = \lim_{x \to +\infty} 3e^x + 3x^2 + 2x - 1 \qquad D = \lim_{x \to -\infty} xe^{2x} - e^{2x} - x^{14}e^x - 7x$$

$$E = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x\sin(x) - \cos(x) \qquad F = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{5x^4 - 7x + \sqrt{x}e^x}{x^5e^{7x} - 3\sqrt{x}}$$

$$G = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) \qquad H = \lim_{x \to 1} \frac{-2x^2 - x + 3}{x - 1}$$

$$I = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad J = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$$

Bonus (+1 point, à traiter à la fin) : calculer la limite suivante :

$$K = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$$

1. Également appelé « théorème de croissance comparée exponentielle-polynôme ».

Exercice n° 2 (6 pts, 20 minutes)

QCM – Dans chacune des quatre situations suivantes, indiquer sans justification la ou les propositions qui peuvent être déduites de l'énoncé.

Pour chaque situation, il peut y avoir plusieurs propositions correctes :

— si toutes les propositions exactes sont choisies et seulement celles-ci, alors la totalité des points est attribuée ;

— si une partie seulement des bonnes propositions sont choisies mais aucune mauvaise, alors la moitié des points est attribuée ;

— dans tous les autres cas, aucun point n'est attribué.

1. Soit $f : x \longmapsto \frac{3x-1}{8x+2}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet exactement une droite verticale et une droite horizontale pour asymptotes.
   (b) La droite d'équation $x = \frac{3}{8}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) $\lim\limits_{x \to \frac{-1}{4}} f(x)$ existe.
   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Soit $f : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   (a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} = f(3)$.
   (b) f admet une limite finie en $+\infty$.
   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ n'est pas définie.
   (d) La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ admet une limite en $+\infty$.

3. Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $]-1, 1[$ telles que pour tout $x \in]-1, 1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   (a) Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$, alors $\frac{f}{g}$ a une limite égale à 1 en 0.
   (b) Si g a une limite finie en 0, alors f a une limite finie en 0.
   (c) Si $\frac{f}{g}$ a une limite en 0, alors cette limite est finie et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Si g a une limite égale à $+\infty$ en 1, alors f a une limite égale à $+\infty$ en 1.

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, qui n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.
   (a) La fonction $g : x \longmapsto f(x+1)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
   (b) La suite $(f(n))_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
   (c) La suite $(f(n))_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite en $+\infty$.
   (d) Il n'existe aucun intervalle de la forme $[A, +\infty[$ sur lequel la fonction f est monotone.

Problème (le reste, bonus)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A, +\infty[$. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) f est croissante.

(ii) g est décroissante.

(iii) $g - f$ admet, en $+\infty$, une limite égale à zéro.

Démontrer que f et g admettent une limite commune en $+\infty$.

Vous êtes invités à faire figurer toute trace de réflexion, même non aboutie, engagée en vue de la résolution de ce problème. Il est recommandé de commencer par représenter graphiquement la situation.