Valentin Melot
5 déc. 2020

Correction du DS n° 4.

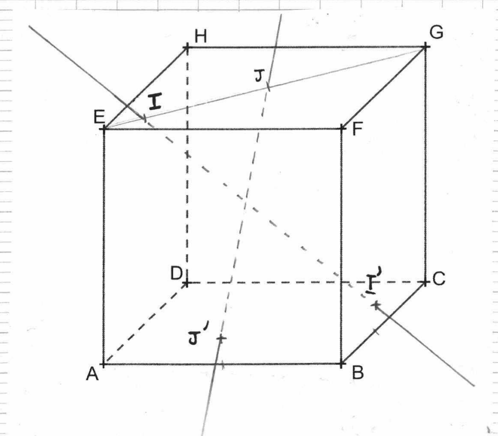
Questions de cours :

1. Une base de vecteurs de l'espace est un triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
   (i) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires
   (ii) ou il existe des réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w}$.

Exercice :

1.



2. On exprime $\vec{EI}$ et $\vec{EJ}$ en fonction de $\vec{EF}$ et $\vec{EH}$.

$\vec{EI} = \vec{EA} + \vec{AI}$ d'après la relation de Charles

$= -\vec{AE} + \left(\frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AD} + \vec{AE}\right)$

$\vec{EI} = \frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AD}$

$= \frac{1}{8}\vec{EF} + \frac{1}{8}\vec{EH}$

$\vec{EJ} = \vec{EA} + \vec{AJ}$ d'après la rel. de Charles

$= -\vec{AE} + \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}\right)$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$= \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}$

Donc I et J appartiennent au carré de côtés [EF] et [EH].

I et J appartiennent à la même face EFGH du cube.

3. $\vec{AI} = \frac{1}{8}\vec{AB} + \frac{1}{8}\vec{AD} + \vec{AE}$,

donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}; 1\right)$

dans la base $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

De même, : J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

I' a pour coordonnées $\left(1; \frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right)$

J' a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{8}\right)$

4. Cf. figure.

5. Les coordonnées de $\overrightarrow{II'}$ sont : $\begin{pmatrix} x_{I'} - x_I \\ y_{I'} - y_I \\ z_{I'} - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/4 \\ -7/8 \end{pmatrix}$.

——— $\overrightarrow{IJ}$ ——— $\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 0 \end{pmatrix}$

——— $\overrightarrow{IJ'}$ ——— $\begin{pmatrix} x_{J'} - x_I \\ y_{J'} - y_J \\ z_{J'} - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$

$\frac{3/8}{3/8} \neq \frac{-1/8}{3/8}$, donc $\overrightarrow{IJ'}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires.

Dès lors,

$\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ sont coplanaires

ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\overrightarrow{II'} = \alpha . \overrightarrow{IJ} + \beta . \overrightarrow{IJ'}$

ssi le système Σ : $\begin{cases} 7/8 = 3/8\,\alpha + 3/8\,\beta \\ 1/4 = 3/8\,\alpha - 1/8\,\beta \\ -7/8 = -7/8\,\beta \end{cases}$

admet des solutions.

Or, $\Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} 7/8 = 3/8\,\alpha + 3/8 \\ 1/4 = 3/8\,\alpha - 1/8 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{8}\alpha = 1/2 \\ \frac{3}{8}\alpha = 3/8 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Donc, Σ n'admet pas de solutions.
Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ ne sont pas coplanaires.

6. Si les droites (II') et (JJ') étaient sécantes, alors les points I, I', J et J' seraient coplanaires. Donc les vecteurs $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ seraient coplanaires.
Ces vecteurs n'étant pas coplanaires, (II') et (JJ') ne sont pas sécantes.

<u>OU</u>

D'après la question précédente, $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ ne sont pas coplanaires.
Donc les points I, I', J et J' ne sont pas coplanaires.
Donc les droites (II') et (JJ') ne sont pas coplanaires.
Donc elles ne sont pas sécantes.

<u>Problème</u>

<u>Partie I</u>

1. Par définition, les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont même direction et même sens. En outre, leur longueur respective est 1 et a.
Donc $\overrightarrow{CB} = a . \vec{i}$
Donc B a pour coordonnées : $(a ; 0 ; 0)$.

2. $D(0 ; a ; 0)$ $E(a ; a ; a)$ $G(0 ; 0 ; a)$
$A(a ; a ; 0)$ $F(a ; 0 ; a)$ $H(0 ; a ; a)$.

3. Les coordonnées du point M sont, d'après le cours :

$$\left(\frac{x_G + x_F}{2} \; ; \; \frac{y_G + y_E}{2} \; ; \; \frac{z_G + z_E}{2} \right)$$

soit : $\left(\frac{a}{2} \; ; \; 0 \; ; \; a \right)$.

Partie II

1. On conjecture que:

K a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2} \; ; \; \frac{a}{2} \; ; \; 0 \right)$

S a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2} \; ; \; \frac{a}{2} \; ; \; h \right)$

2. De façon similaire,

L a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2} \; ; \; a \; ; \; \frac{a}{2} \right)$.

T a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2} \; ; \; a + h \; ; \; \frac{a}{2} \right)$.

3. On recherche la ou les valeurs possibles de h par analyse-synthèse.

<u>Analyse :</u> soit h une solution au problème

Les points M, S et T sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{MS}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x_S - x_M \\ y_S - y_M \\ z_S - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a/2 \\ h - a \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x_T - x_S \\ y_T - y_S \\ z_T - z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} + h \\ \frac{a}{2} - h \end{pmatrix}$$

Par colinéarité, $\overrightarrow{ST}$ étant non-nul, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{MS} = k . \overrightarrow{ST}$

Soit : $\begin{cases} 0 = 0.k \\ \frac{a}{2} = k . \left(\frac{a}{2} + h \right) \\ h - a = k \left(\frac{a}{2} - h \right) \end{cases}$

d'où en particulier : $(h - a)\left(\frac{a}{2} + h \right) = \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} - h \right)$

donc : $\frac{ah}{2} + h^2 - \frac{a^2}{2} - ah = \frac{a^2}{4} - \frac{ah}{2}$

d'où : $h^2 = \frac{3a^2}{4}$.

On a donc nécessairement : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ou $h = -\frac{\sqrt{3}}{2} a$ si les points M, S et T sont alignés.

<u>Synthèse :</u>

Dès lors que la pyramide $ABCDS$ est construite à l'intérieur du cube, on doit avoir $h \geq 0$.

Supposons que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. D'après les calculs précédents, on a alors :

$$\overrightarrow{MS}\begin{pmatrix}0\\ a/2\\ \frac{\sqrt3-2}{2}a\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt3+1}{2}a\\ -\frac{\sqrt3+1}{2}a\end{pmatrix}$$

On vérifie que :

$(\sqrt3+1)\overrightarrow{MS}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt3+1}{2}a\\ \frac{(\sqrt3+1)(\sqrt3-2)}{2}a\end{pmatrix}$

avec : $(\sqrt3+1)(\sqrt3-2) = 3-2\sqrt3+\sqrt3-2 = -\sqrt3+1$.

Donc $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, donc M, S et T sont alignés.

Conclusion : l'unique solution au problème est :

$$h = \frac{\sqrt3}{2}a.$$

4. Supposons que les points M, S, T et T' sont alignés. Alors, en particulier, les points M, S et T sont alignés. Donc $h = \frac{\sqrt3}{2}a$.
De plus, les points M, T et T' sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{TT'}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{MT}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_T-x_M\\ y_T-x_M\\ z_T-z_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ a+h\\ -\frac{a}{2}\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{TT'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_{T'}-x_T\\ y_{T'}-y_T\\ z_{T'}-z_T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -2h\\ 0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{TT'}$ étant non nul, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MT} = k.\overrightarrow{TT'}$.
En projetant selon la troisième coordonnée, k vérifie :
$$-\frac{a}{2} = 0.k.$$

Or, $a \neq 0$, ce qui est impossible.

Donc, par l'absurde, l'hypothèse initiale est fausse.
Les points M, S, T et T' ne sont pas alignés.

Partie III :

1. Soit $z \in (d)$.
(d) étant la médiatrice de [AB], z est équidistant de A et B.
Donc z appartient au plan médiateur $\mathcal{P}$ de [AB].
Ceci étant vrai quel que soit $z \in (d)$, on a bien : $(d) \subset \mathcal{P}$.

2. Par hypothèse, le triangle ABS est isocèle en S.
Donc $SA = SB$. Donc $S \in \mathcal{P}$.
De même, BCS est isocèle en S. Donc $SB = SC$.
Donc $S \in \mathcal{P}'$.
Donc $S \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

3. On sait que Δ est perpendiculaire au plan (ABC).
Or, une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toute

droite de ce plan.
Donc Δ est orthogonale à toute droite de (ABC).
En particulier, Δ est orthogonale à (AB) et à (BC).

4. Par définition de la hauteur d'une pyramide, $[SK]$ est perpendiculaire à la base $ABCD$.
Donc (SK) est la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par S.
Donc $(SK) = \Delta$.

Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, $[SK]$ est orthogonal au segment $[AB]$.
En outre, d'après le résultat de la question 2, S appartient à $\mathcal{P}$, le plan orthogonal à à $[AB]$ passant par S.
Donc K appartient également au plan orthogonal à $[AB]$ passant par S, soit $K \in \mathcal{P}$.

De même, $[SK]$ est orthogonal à $[BC]$ donc K appartient à l'orthogonal à $[BC]$ passant par S, qui est $\mathcal{P}'$ soit $K \in \mathcal{P}'$.

Donc $K \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

5. K est un point du plan (ABC).
D'après la question précédente, $K \in \mathcal{P}$. Donc K est équidistant de A et B. Donc $K \in (d)$.
De même, $K \in \mathcal{P}'$ donc K est équidistant de B et

C. Donc $K \in (d')$.

K est donc à l'intersection des médiatrices des côtés du carré $ABCD$.
Donc K est le centre de $ABCD$.

Donc K a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2} ; \frac{a}{2} ; 0\right)$.