Devoir surveillé numéro 4 : géométrie dans l'espace

Lycée N. D. de la Providence – Terminales spé maths

7 décembre 2020

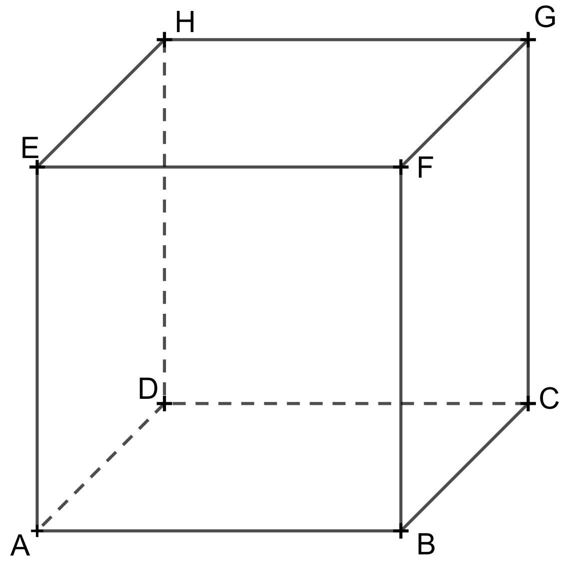
Exception faite des questions de cours ou des questions sans justification attendue, le nombre de points est détaillé de la façon suivante : résultat + arguments + rédaction. Par exemple, une question notée sur 0,25 + 0,5 + 0,25 rapportera 0,25 points si le résultat est correct, 0,5 points si tous les arguments sont présents, et 0,25 points s'ils sont dans le bon ordre et correctement rédigés.
Les exercices sont indépendants. En cas de blocage sur une question, il est possible d'admettre son résultat et de passer aux questions suivantes.
Le devoir est noté sur 24. Les questions bonus ne seront comptées que si le reste du devoir a été traité sérieusement au préalable.
L'énoncé doit être rendu avec votre composition. Vous veillerez à y faire figurer votre nom.

Questions de cours (4 pts)

1. (2 pts) Énoncer la définition d'une base de vecteurs de l'espace.
2. (2 pts) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs soient coplanaires.

Exercice (6,5 pts)

On considère un cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



1. (1 + 0 + 0) Placer sur la figure, de façon approximative, les points I, J, I' et J' tels que :

   — $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$;

   — $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$;

   — $\overrightarrow{AI'} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$;

   — $\overrightarrow{AJ'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

2. (0,25 + 0,5 + 0,25) Justifier que les points I et J sont sur une même face du cube. Préciser laquelle.
3. (0,5 + 0,5 + 0) Donner, en justifiant sommairement, les coordonnées des points I, J, I' et J' dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
4. (0,5 + 0 + 0) On décide de « percer » le cube à l'aide de deux droites, (II') et (JJ'). Tracer ces deux droites.
5. (0,5 + 1 + 0,5) Les vecteurs $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IJ'}$ sont-ils coplanaires ?
6. (0,25 + 0,5 + 0,25) Les droites (II') et (JJ') sont-elles sécantes ?

Problème (13,5 pts)

Pour l'ensemble des questions, il est recommandé de produire des figures au brouillon. Ces figures ne seront pas à rendre et ne tiendront pas lieu de justification.
La partie III est indépendante des deux précédentes. Elle vise à démontrer un résultat admis au début de la partie II.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté $a \geqslant 0$.

Partie I : préliminaires (2,5 pts)

On définit trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, tous trois de norme 1, et qui ont même direction et même sens que $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$ respectivement. On travaille, dans cette partie et dans la suivante, dans le repère $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, qui est orthonormé.

1. (0,25 + 0,5 + 0,25) Déterminer, <u>en les justifiant rigoureusement</u>, les coordonnées du point B.
2. (0,5 + 0 + 0) Donner, sans les justifier, les coordonnées des points A, D, E, F, G et H.
3. (0,25 + 0,5 + 0,25) Déterminer les coordonnées du point M, milieu de $[FG]$.

Partie II : géométrie vectorielle (7 pts)

On construit, à l'intérieur du cube, une pyramide $ABCDS$ de sommet S et de hauteur $0 \leqslant h \leqslant a$, telle que les quatre faces triangulaires ABS, BCS, CDS et DAS sont <u>isocèles en S</u>. On note K le pied de la hauteur de la pyramide.

1. (1,5 + 0 + 0) Conjecturer, sans justification, les coordonnées des points K puis S. *La partie III du problème aura pour objet de justifier rigoureusement cette conjecture.*

On construit de façon similaire une pyramide $ADHET$, identique à $ABCDS$, <u>à l'extérieur</u> du cube $ABCDEFGH$, et l'on note L le pied de la hauteur de la pyramide.

2. (0,5 + 0 + 0) Donner, sans justification, les coordonnées des points L et T.

3. (1 + 1 + 1) En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer, en fonction de a la ou les éventuelle(s) valeur(s) de h pour laquelle (lesquelles) les points M, S et T sont alignés.

On construit enfin le point T', symétrique du point T par rapport au plan (ADH)

4. (0 + 1 + 1) Par l'absurde, démontrer que les points M, S, T et T' ne sont jamais alignés.

Partie III BONUS : géométrie descriptive (4 pts)

On se concentre désormais sur la pyramide $ABCDS$, et l'on souhaite démontrer la conjecture effectuée en question 1 de la partie II sur les coordonnées de K. On s'abstiendra désormais d'utiliser le repère orthonormé utilisé en parties I et II.

Pour rappel, on suppose seulement que les faces triangulaires de la pyramide sont isocèles en S et que $ABCD$ est un carré.

1. (0 + 0,5 + 0,25) Soit (d) la médiatrice du segment $[AB]$ dans le plan (ABC), et $\mathscr{P}$ le plan médiateur de $[AB]$. Justifier que (d) est incluse dans $\mathscr{P}$.

On admet de même que (d'), la médiatrice de $[BC]$ dans le plan (ABC), est incluse dans $\mathscr{P}'$, le plan médiateur de $[BC]$.

2. (0 + 0,5 + 0,25) Démontrer que S appartient à $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.

On note (Δ) la droite perpendiculaire au plan (ABC) et passant par S.

3. (0 + 0,5 + 0,25) Justifier que Δ est orthogonale à (AB) et à (AC).
4. (0 + 0,75 + 0,25) En déduire que K appartient à $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.
5. (0 + 0,5 + 0,25) Conclure.