Éléments de correction pour le sujet de reprise pour le DS 3

Valentin Melot — Terminale spé maths A

15 décembre 2020

Exercice 1 : tirages de cartes

2. Généralement, « couleur » signifie carreau, pique, cœur ou trêfle, mais j'ai compté les points si vous aviez considéré que c'était rouge ou noir.

3. Tirer un full, c'est choisir deux hauteurs (13×12 combinaisons), puis trois cartes de la première ($\binom{3}{3}$ combinaisons) puis deux cartes de la seconde ($\binom{4}{2}$ combinaisons).

4. Revient à choisir une hauteur minimale (entre 2 et 10), et les couleurs de chacune des cinq cartes (4^5 possibilités).

Exercice 2 : formation de groupes

Exercice un peu plus difficile, sur lequel il est compréhensible qu'il y ait eu des erreurs et peu d'essais. Remarque générale : pour les *très grandes* valeurs en dénombrement, il est recommandé de développer l'écriture exacte, pour obtenir une forme la plus simplifiée possible. Par exemple, des produits de combinaisons peuvent souvent conduire des factorielles à se simplifier. Une valeur approximative en écriture scientifique n'est généralement pas attendue.

1. Il y a de nombreuses façons de voir les choses. Une proposition parmi tant d'autres :

— Faire ces groupes revient à choisir deux élèves parmi les 31, puis deux parmi les 29 restants... puis deux parmi les cinq restants, les trois derniers formant le trio. Cela fait donc

$$\binom{31}{2}\binom{29}{2}\binom{27}{2}\dots\binom{5}{2} = \prod_{i=2}^{15}\binom{2k+1}{2}$$

choix possibles de groupes si l'on tient compte de l'ordre des groupes. Or, on ne veut pas tenir compte de cet ordre, donc il faut diviser par 14! (le nombre de combinaisons de groupes).

On note au passage que :

$$\prod_{i=2}^{15}\binom{2k+1}{2} = \prod_{i=2}^{15}\frac{(2k+1)(2k)}{2} = \frac{31!}{3!\ 2^{14}}$$

Donc le résultat est :

$$\frac{31!}{3! \times 2^{14} \times 14!}$$

À noter que ce résultat peut se réécrire sous une autre forme. En effet, on note que

$$2^{14} \times 14! = 2 \times 14 \times 2 \times 13 \times \dots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 28 \times 26 \times \dots \times 4 \times 2$$

— On peut aussi considérer que l'on forme d'abord le trio (donc $\binom{31}{3}$). Puis parmi les 28 qui restent, on prend le premier et on l'associe à l'un des 27 restant. Puis on prend le troisième, et on l'associe à l'un des 25 restants, etc. ce qui donne in fine :

$$\binom{31}{3} \times 27 \times 25 \times 23 \times \ldots \times 3 \times 1$$

On montre que le résultat est le même en multipliant et en divisant par $A = 28 \times 26 \times \ldots \times 4 \times 2$. Notons que $A = 2 \times 14 \times 2 \times 13 \times \ldots \times 2 \times 1 = 2^{14} \times 14!$.

On trouve donc également bien comme résultat :

$$\frac{31!}{3! \times 2^{14} \times 14!}$$

2. Là encore, plusieurs façons de s'en sortir. L'idée est de décomposer l'ensemble des choix possibles en des sous-ensembles disjoints, eux-mêmes exprimés comme des différences entre un gros ensemble et un sous-ensemble d'options refusées qui y est inclus.

Une option possible est de dire que l'on étudie deux ensembles de cas : ceux où David et Jeanne sont ensemble dans une même paire (A cas), et ceux où ils sont ensemble dans un même trio (B cas). Dans le cas A, on dénombre également les cas où Pierre et Paul sont dans une même paire (C cas) et dans le même trio (D cas). Dans l'ensemble de cas B, on dénombre également deux sous-ensembles : celui où Pierre et Paul sont dans une même paire (E cas) et celui où ils sont dans le même trio (c'est impossible, donc $F = 0$ cas).

Le résultat final est : $(A - C - D) + (B - E)$. Qu'il faut calculer sans erreur, et exprimer de façon simplifiée. En n'oubliant pas que l'on ne s'intéresse pas à l'ordre des paires.

Exercice 3 : anagrammes

Un exercice globalement sans difficulté, à un détail important de rédaction près. Il ne faut pas oublier qu'en théorie des ensembles, on compte toujours les éléments sans répétitions [1] et sans tenir compte de l'ordre [2]. Autrement dit, l'ensemble $\{T; O; M; A; T; E\}$ est égal à l'ensemble $\{T; O; M; A; E\}$, ainsi qu'à l'ensemble $\{A; E; M; O; T\}$.

Aussi, il faut absolument éviter les présentations qui consistent à recourir à des ensembles tels que $\{A; A\}$ ou à $\{A; A; A; N; N\}$. Et ne pas oublier que le premier ensemble a cardinal 1, alors que le deuxième a cardinal 2.

Vous avez presque tous trouvé le bon résultat, c'est donc sur la rédaction que vous devez faire attention. De très nombreuses rédactions sont possibles, j'en propose une ci-après, pour le mot ANANAS.

Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des anagrammes du mot $ANANAS$.

On considère le mot $A_1\ N_1\ A_2\ N_2\ A_3\ S$. Ce mot a six lettres différentes (A_1, A_2, A_3, N_1, N_2, S). Il a donc $6! = 720$ anagrammes.

Or, choisir un anagramme de $A_1\ N_1\ A_2\ N_2\ A_3\ S$ revient à choisir indépendamment un anagramme de $ANANAS$, une permutation des lettres A_1, A_2 et A_3 ($3!$ possibilités) ainsi qu'une permutation des lettres N_1 et N_2 (deux possibilités).

On a donc : $6! = \text{Card}(\mathfrak{P}) \times 3! \times 2!$. Donc $\text{Card}(\mathfrak{P}) = \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$.

1. Si l'on tient compte des répétitions, ça s'appelle un multi-ensemble.
2. Si l'on tient compte des répétitions et de l'ordre, ça s'appelle une liste, un mot, une suite finie ou un n-uplet.