Planche 1

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 40 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*
Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|.\|$. L'on suppose que $\forall (u,v)\in A^2$, $\|u.v\| \leqslant \|u\|.\|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| \leqslant 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice 2 (douze points) Pour $n \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ calculer :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & & 0 & 0 \\ \frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$$

Planche 2

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 21 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum(\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 2 (douze points) Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{C}$ continue admettant des limites finies en 0 et $+\infty$. Soient $0 < a < b$ deux réels. Calculer :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x$$

Planche 3

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 77 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*
Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice 2 (douze points) Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ est soit de la forme $\alpha\mathbf{Z}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$, soit dense dans $\mathbf{R}$. L'on pourra pour cela, pour un sous-groupe G non trivial, considérer le nombre $\inf(G \cap \mathbf{R}_+^*)$.

En déduire que $\{2^n 3^m \ : (n, m) \in \mathbf{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Planche 4

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 112 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*
Soient $n \in \mathbf{N}^*$, E un ensemble de cardinal $\mathbf{N}$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subseteq B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $A \cup B \cup C = E$ avec A, B et C disjoints.

Exercice 2 (douze points) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

En effectuant des changements de variable en cos et tan, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$. On pourra se rappeler les intégrales de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Planche 5

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 6 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 2 (douze points) Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergent uniformément sur $\mathbf{R}$ vers f. Démontrer que f est polynomiale.

Planche 6

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 84 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*

1. Donner la définition de l'argument d'un nombre complexe non nul.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^n = 1$.
3. En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 (douze points) Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, ψ_1, …, ψ_n et φ des formes linéaires sur E. L'on cherche à montrer que

$$\varphi \in \operatorname{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \iff \bigcap_{i=1}^{n} \ker \psi_n \subseteq \ker \varphi$$

Montrer le sens direct. Vérifier que le sens réciproque peut se ramener au cas où $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est une famille libre. Le prouver en étudiant le noyau de l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ x & \longmapsto & (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \varphi(x)) \end{array}$$

Planche 7

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 75 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.* On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base de $\mathbf{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. L'on donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$$

Exercice 2 (douze points) L'on souhaite démontrer que pour tous $M > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ fonctions $\mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ 2π-périodique et $a_1, \ldots, a_n$ réels formant une famille libre du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, l'on a :

$$\frac{1}{T} \int_M^T \prod_{k=1}^n f_k(a_k t) \mathrm{d}t \xrightarrow[T \to \infty]{} \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{d}t$$

Montrer que ce résultat est vrai dans le cas où les f_k sont tous des polynômes trigonométriques (de la forme $t \longmapsto \sum_{i=-n}^m c_i \cos(t)$). On pourra pour cela exploiter la multilinéarité des deux membres de l'égalité par rapport aux f_k.

À l'aide du théorème de Weierstraß, démontrer que les fonctions f_k peuvent être approchées uniformément sur $\mathbf{R}$ par des polynômes trigonométriques. En déduire, à l'aide du théorème de la double-limite, l'égalité recherchée.

L'on fixe par ailleurs $\varepsilon > 0$ et $b_1, \ldots, b_n$ n réels. Justifier qu'il existe $t > M$ et n entiers naturels $m_1, \ldots, m_k$ tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], |ta_k - b_k - m_k| < \varepsilon$$

Planche 8

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 75 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.*

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbf{Z}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbf{N}^*$. Prouver que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système :
$$\begin{cases} x & \equiv & 6 & \mod 17 \\ x & \equiv & 4 & \mod 15 \end{cases}$$
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 dans $\mathbf{Z}$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions du système dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 2 (douze points) Soient $\mathbf{K}$ un corps, et $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbf{K}$-algèbre commutative intègre de dimension finie. Quelle est la propriété à vérifier pour montrer que A est un corps ?

Le montrer en étudiant pour $a \neq 0$ l'application $A \longrightarrow A$, $x \longmapsto a \times x$.

Le redémontrer en étudiant la famille $(a^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Planche 9

Une demi-heure de préparation, une demi-heure de passage. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – CCP 75 (huit points) *Une rigueur absolue est attendue lors du traitement de cet exercice.* On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels tels que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n y_n$ converge. On pose alors $\langle x|y\rangle$ sa somme.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2 et l'on munit ℓ^2 de la norme euclidienne associée.

2. Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\varphi : \ell^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\varphi(x) = x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbf{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites presque nulles, c'est-à-dire dont seul un nombre fini de termes est non nul. Déterminer $F^\perp$, et comparer F à $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 2 (douze points) Déterminer l'image de l'ensemble des matrices symétriques, puis des matrices symétriques, par la fonction exponentielle