*Groupe engendré par les transvections.* Rappeler la définition d'une matrice de transvection vectorielle. Quelle est son déterminant ? Son inverse ?

Posons $[\tau]$ le groupe engendré par les transvections. Quelles sont les valeurs prises par det sur $[\tau]$ ?

Par récurrence sur $M$, montrer que toute matrice de déterminant 1 est produit de matrices de transvections. L'on pourra commencer par montrer qu'à un changement de signe près, toute permutation peut être obtenue comme succession de transvections, puis s'inspirer de la preuve de la méthode du pivot de Gauss.

---

*Algèbres commutatives intègres de dimension finie.* Soient $\mathbf{K}$ un corps, et $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbf{K}$-algèbre commutative intègre de dimension finie. Quelle est la propriété à vérifier pour montrer que $A$ est un corps ?

Le montrer en étudiant pour $a \neq 0$ l'application $A \longrightarrow A$, $x \longmapsto a \times x$.

Le redémontrer en étudiant la famille $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$.

---

*Matrices de permutation.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Posons pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma$ la matrice $(\delta_i^{\sigma(j)})$ où $\delta$ est le symbole de Kronecker.

Représenter les matrices $P_\sigma$ pour quelques permutations, décrire de façon plus simple l'ensemble $\{P_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$. Calculer $O_n \cap M_n(\mathbf{N})$, où $O_n$ désigne le groupe des matrices orthogonales à coefficients réels.

Vérifier que $P : \sigma \in \mathfrak{S}_n \longmapsto P_\sigma \in GL_n(\mathbf{R})$ est un morphisme de groupes. En étudiant le comportement de cette application sur un sous-ensemble générateur de $\mathfrak{S}_n$ simple, calculer $\det \circ P$.

---

*Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$.* Pour tout $G$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$, l'on considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot|\cdot\rangle_G & : & \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \sum_{M \in G} {}^t x {}^t M M y \end{array}$$

où les scalaires sont identifiés aux matrices carrées d'ordre 1.

Vérifier que $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\{I_n\}}$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour tout $G$ sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$ est un produit scalaire. Vérifier que toute matrice $M \in G$ est une isométrie pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_G$.

On admet l'existence d'une matrice symétrique $S \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $S^2 = \sum_{M \in G} {}^t M M$. Que peut-on dire de $\{S^{-1} M S : M \in G\}$ ? En déduire que tout sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

---

*Caractérisation des combinaisons linéaires de formes linéaires* Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ et $\varphi$ des formes linéaires sur $E$. L'on cherche à montrer que

$$\varphi \in \operatorname{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \iff \bigcap_{i=1}^{n} \ker \psi_n \subseteq \ker \varphi$$

Montrer le sens direct. Vérifier que le sens réciproque peut se ramener au cas où $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est une famille libre. Le prouver en étudiant le noyau de l'application :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ x & \longmapsto & (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \varphi(x)) \end{array}$$

---

*La comatrice est multiplicative* Soient $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\operatorname{Com}(MN) = \operatorname{Com}(M)\operatorname{Com}(N)$.

Calculer $\operatorname{Com}(M)$ dans le cas où $M$ est une matrice de rang inférieur ou égal à $n-2$. Montrer que pour $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{rg}(MN) \leqslant \min(\operatorname{rg} M, \operatorname{rg} N)$. En déduire que $\operatorname{Com}(MN) = \operatorname{Com}(M)\operatorname{Com}(N)$ dès que $\operatorname{rg}(M) \leqslant n-2$ ou $\operatorname{rg}(N) \leqslant n-2$.

Soit $F = \mathbf{K}(X_1, \ldots, X_{n^2}, Y_1, \ldots, Y_{n^2})$ le corps des fractions rationnelles à $2n^2$ variables. En appliquant les résultats précédents aux matrices

$$M := \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n & \ldots & X_{n^2} \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} Y_1 & \ldots & Y_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n & \ldots & Y_{n^2} \end{pmatrix}$$

et en se rappelant que l'évaluation d'une fraction rationnelle en un point de son ensemble de définition est un morphisme de corps, montrer que l'application comatrice est multiplicative.

*Une norme.* Soit

$$\begin{array}{rcccl} N & : & \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ & & f & \longmapsto & \int_0^1 |xf(x)| \mathrm{d}x \end{array}$$

Vérifier que $N$ est une norme. Est-elle euclidienne ?

---

*Points fixes de groupes.* Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien et $G$ un sous-groupe fini de $GL_n(R)$. Soit $K$ une convexe de $E$, c'est-à-dire que $\forall x, y \in K$, $\forall t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in K$.

Posons $\forall x \in E$, $N(x) := \max_{u \in G} \|u(x)\|$. Vérifier que $N$ est une norme sur $E$.

Supposons que $N(x+y) = N(x) + N(y)$. Montrer que $x$ et $y$ sont positivement liés.

On suppose que $N$ possède un minimum $x_0$ sur $K$. Montrer que $x_0$ est stable par chaque élément de $G$.

---

*Normes $L^p$ et quotients d'espaces vectoriels.* Soient pour $p \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}_m([0,1])$, $N_p(f) := \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p \, \mathrm{d}t}$.

Vérifier que $N_p$ est homogène. Montrer qu'elle est sous-additive pour $p = 1$ et pour $p = 2$. *On admet que toutes les $N_p$ sont sous-additives.* $N_p$ est-elle séparée ?

Notons $\ker N_p := \{x \in \mathcal{C}_m([0,1]) \ : N_p(x) = 0\}$. Montrer que $\ker N_p$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Montrer que $f \sim g \iff f - g \in \ker N_p$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_m([0,1])$. On note $L^p([0,1])$ l'ensemble de ses classes d'équivalence ; justifier que $L^p([0,1])$ possède une structure d'espace vectoriel, et que $N_p$ induit une norme sur $L^p$.

---

*Comparaison de normes.* Soient $E$ un espace vectoriel, $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$. Montrer que :

$$N_1 = N_2 \iff B_{N_1}(0,1) = B_{N_2}(0,1) \iff B'_{N_1}(0,1) = B'_{N_2}(0,1)$$

---

*Caractérisation des boules.* Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie $X$ de $E$ est dite convexe si $x, y \in X$, $t \in [0,1] \implies tx + (1-t)y \in X$.

Montrer que pour $B \subset E$, il y a équivalence entre :

$(i)$ Il existe une norme $N$ sur $E$ telle que $B$ soit la boule unité fermée pour $N$.

$(ii)$ $B$ est une partie fermée bornée de $E$, convexe, symétrique en 0 et contenant une boule de centre 0.

---

*Formes linéaires continues.* Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. Rappelons qu'une forme linéaire $\ell$ sur $E$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité. $\|\ell\|'$ désigne alors le supremum des valeurs prises.

Montrer que $\|.\|'$ est une norme sur $E'$, l'ensemble des formes linéaires continues.

Supposons $E$ de dimension finie, soit $\ell \in E*$. En considérant l'application $x \in E \longmapsto \|x\| + \|\ell(x)\|$, montrer que $\ell$ est continue.

Réciproquement, si $E$ est de dimension infinie, construire une forme linéaire discontinue. *L'on pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un supplémentaire.*

*Exponentielle de matrices.* On travaille dans la $\mathbf{R}$-algèbre de dimension finie $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +, \times, \cdot)$. Donner une norme d'algèbre sur cet espace.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n!}M^n$ converge ; on note $\exp(M)$ sa limite.

Justifier que $M$ commute avec $\exp(M)$. On suppose que $M$ commute avec $N$, justifier que $\exp(MN) = \exp(M)\exp(N)$, puis que $\exp(M)$ commute avec $\exp(N)$. En déduire que $\exp(M)$ est inversible. L'application suivante est-elle un morphisme de groupes ?

$$\begin{array}{rcl} GL_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array}$$

---

*Inverse dans une algèbre.* Soient $\mathbf{K}$ un corps et $(X, +, \times, \cdot, \|\cdot\|)$ une $\mathbf{K}$-algèbre normée. Soit $a \in \mathbf{K}$ tel que $\|a\| < 1$ ; montrer que $1 - a$ est inversible.

L'on pourra factoriser $1 - a^n$ et étudier sa limite quand $n \to \infty$.

---

*Règle de Raabe-Duhamel.* Soit $\sum u_n$ une série telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge ; si $\alpha < 1$ alors elle diverge ; et qu'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.

On pourra pour cela comparer les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à $\frac{(n+1)^{-\gamma}}{n^{-\gamma}}$ pour un $\gamma$ bien choisi...

---

*Norme sur un espace de fonctions.* Soit $E$ un sous-espace vectoriel de dimension $d < \infty$ de $\mathcal{C}([0,1])$. Montrer l'existence de $d$ réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que l'application $f \longrightarrow \sum_{i=1}^{d} |f(a_i)|$ soit une norme sur $E$.

---

*Absolue convergence en dimension finie.* L'on considère $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme 2 dans la base canonique. Montrer que la série de terme général $\frac{X^n}{n}$ est absolument convergente, mais pas convergente. *L'on pourra admettre qu'une projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie est séquentiellement continue, ie compatible avec le passage à la limite.*

*Réciproque d'une injection continue.* Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose $\varphi$ bornée sur la boule unité, montrer que $\varphi$ est continue.

Soit
$$I \quad : \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que $I$ est une injection continue, mais n'est pas un homéomorphisme sur son image.

---

*Absolue convergence en dimension finie.* Montrer que la série de terme général $\frac{X^n}{n}$ est absolument convergente, mais pas convergente dans $(\mathbf{R}[X], \|.\|_2)$, puis dans $(\mathbf{R}[X], \|.\|_1)$.

---

*$\varepsilon$-voisinage d'une partie.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $\varepsilon > 0$ et $A$ une partie de $E$. Montrer que :
$$A^{(\varepsilon)} := \{x \in E \ : \exists y \in A, \|y - x\| < \varepsilon\}$$
est un ouvert de $E$.

Soient $F_1$, $F_2$ deux fermés disjoints de $E$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints $U_1$, $U_2$ contenant respectivement $F_1$ et $F_2$. (faire un dessin !)

---

*Fermés et distances* Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $F \subseteq E$ est un fermé si, et seulement si :
$$\forall x \in E, [x \in F \iff d(x,F) = 0]$$

Soient $F_1$, $F_2$ deux fermés disjoints de $E$. Construire une fonction continue $f : E \longrightarrow [0,1]$ telle que pour tout $x \in E$ :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} f(x) = 0 & \iff & x \in F_1 \\ f(x) = 1 & \iff & x \in F_2 \end{array} \right.$$

En déduire l'existence de deux ouverts disjoints contenant respectivement respectivement $F_1$ et $F_2$.

---

*Injections continues sur un compact.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $K$ un compact de $E$ et $F$ une partie fermée incluse dans $K$. Montrer que $F$ est compacte.

Soit $(E', \|.\|')$ un espace vectoriel normé. On se donne une injection continue $f : K \longrightarrow E'$. Montrer que $f$ est un homéomorphisme. *On pourra admettre (ou montrer, si le temps le permet) qu'une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est fermée.*

*Injections continues sur un compact.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $K$ un compact de $E$ et $F$ une partie fermée incluse dans $K$. Montrer que $F$ est compacte.

Soit $(E', \|.\|')$ un espace vectoriel normé. On se donne une injection continue $f : K \longrightarrow E'$. Montrer que $f$ est un homéomorphisme. *On pourra admettre (ou montrer, si le temps le permet) qu'une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est fermée.*

---

*Réciproque d'une injection continue.* Soit

$$\begin{array}{rcccl} I & : & (\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty) \\ & & f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que $I$ est une injection continue, mais n'est pas un homéomorphisme sur son image.

---

*Points fixes de fonctions lipschitziennes.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $F$ une partie fermée non vide de $E$, et $f$ une fonction contractante laissant $f$ stable. On se donne $x \in F$, montrer que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $F$.

Soient $K$ un compact convexe non vide de $E$ et $f$ une fonction 1-lipschitzienne de $E$. Montrer que $f$ admet un point fixe. On pourra pour cela introduire $f_n : x \in K \longmapsto \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}f(x)$.

---

*Fonctions faiblement contractantes.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $K$ un compact non vide de $E$, et $f : K \longrightarrow K$ telle que $\forall (x, y) \in K^2$, $x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Prouver que $f$ admet au plus un point fixe. Montrer que la fonction $x \in K \longmapsto \|f(x) - x\|$ admet un minimum $c$, et que celui-ci est le minimum de $f$ sur $K$.

Soit $x \in K$, justifier que $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $c$.

---

*Propriété de Borel-Lebesgue.* Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie $F \subseteq E$ est réputée *avoir la propriété (BL)* si : pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $F \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe sous-ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $F \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

Montrer qu'un point $x \in E$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ si, et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon$. En déduire que si $F$ a la propriété (BL), alors il est compact.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $[0,1] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. On pose

$$F := \left\{ t \in [0,1] \ : \exists J \subseteq I, J \text{fini}, [0,t] \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \right\}$$

Montrer que $F$ est un intervalle non vide, puis qu'il contient son supremum et enfin que celui-ci est égal à 1. En déduire que $[0,1]$ est compact.

---

*Sous-groupes compacts de $GL_n(E)$.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace préhilbertien, $H$ un sous-groupe compact de $GL(E)$. Montrer que l'application $N : x \longmapsto \sup_{h\in H} \|h(x)\|$ est bien définie et est une norme sur $E$.

Justifier que cette norme est laissée stable par tout élément de $h$, et déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x$ et $y$ pour que $N(x + y) = N(x) + N(y)$. Soit $K$ un compact convexe de $E$, montrer que $N$ admet un unique minimum sur $K$, et justifier que celui-ci est fixe par tous les éléments de $H$.

*Fonctions dérivables à valeurs dans le groupe orthogonal.* Soient $n \in \mathbf{N}$, $I$ un ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathcal{O}_{2n+1}$ dérivable. Montrer que $f'(t)$ n'est inversible pour aucun $t \in I$.

---

*Points fixes de fonctions lipschitziennes.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $F$ une partie fermée non vide de $E$, et $f$ une fonction contractante laissant $f$ stable. On se donne $x \in F$, montrer que la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $F$.

Soient $K$ un compact convexe non vide de $E$ et $f$ une fonction 1-lipschitzienne de $E$. Montrer que $f$ admet un point fixe. On pourra pour cela introduire $f_n : x \in K \longmapsto \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}f(x)$.

---

*Fonctions faiblement contractantes.* Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $K$ un compact non vide de $E$, et $f : K \longrightarrow K$ telle que $\forall (x, y) \in K^2$, $x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Prouver que $f$ admet au plus un point fixe. Montrer que la fonction $x \in K \longmapsto \|f(x) - x\|$ admet un minimum $c$, et que celui-ci est le minimum de $f$ sur $K$.

Soit $x \in K$, justifier que $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $c$.

---

*Uniforme continuité.* Montrer qu'une fonction réelle continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et admettant des limites aux bornes y est uniformément continue.

---

*Propriété de Borel-Lebesgue.* Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie $F \subseteq E$ est réputée *avoir la propriété (BL)* si : pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe sous-ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $F \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

Montrer qu'un point $x \in E$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ si, et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon$. En déduire que si $F$ a la propriété (BL), alors il est compact.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. On pose

$$F := \left\{ t \in [0, 1] \ : \exists J \subseteq I, J \text{fini}, [0, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \right\}$$

Montrer que $F$ est un intervalle non vide, puis qu'il contient son supremum et enfin que celui-ci est égal à 1. En déduire que $[0, 1]$ est compact.

---

*Des déterminants* Soient $a, b, c, x \in \mathbf{R}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$$

De façon similaire, pour $n \in \mathbf{N} \backslash \{0, 1\}$ calculer :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & & 0 & 0 \\ \frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$$

*Des déterminants* Soient $a, b, c, x \in \mathbf{R}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$$

De façon similaire, pour $n \in \mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ calculer :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & & 0 & 0 \\ \frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} & \dots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \dots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$$

---

*Fonctions dérivables à valeurs dans le groupe orthogonal.* Soient $n \in \mathbf{N}$, $I$ un ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathcal{O}_{2n+1}$ dérivable. Montrer que $f'(t)$ n'est inversible pour aucun $t \in I$.

---

*Quantiles.* Soient $I$ un intervalle ouvert, et $F$ une fonction croissante de $I$ vers un intervalle $J$. On note $F^{\leftarrow}(y) := \inf\{x \in I : f(x) \leqslant y\}$. Montrer que si les $F_n$ définis sur $I$ à valeurs dans $J$ convergent ponctuellement vers $F$ à valeur dans $J$, alors les $F_n^{\leftarrow}$ convergent ponctuellement vers $F^{\leftarrow}$ en tout point où $F^{\leftarrow}$ est continue.

---

*Une équation fonctionnelle.* Trouver une fonction dérivable non nulle $u : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], u'(x) = u(x-x^2)$. On pourra pour cela introduire la suite $u_0 : x \longmapsto 1$ et $u_{n+1} : x \longmapsto 1+\int_0^x u_n(t-t^2)\mathrm{d}t$.

---

*Convergence $L^p$.* On définit les convergences en moyenne d'ordre $p$ et $q$. Montrer que si $p > q$, alors pour une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur un compact,

$$(f_n)_n \text{ CVU vers } f \implies (f_n)_n \text{ vers } f \text{ en moyenne d'ordre } p \implies f \text{ converge vers } f \text{ en moyenne d'ordre } q.$$

On pourra admettre l'inégalité de Jensen pour cela.

Soit $\Omega := [0,1]$. Montrer que si les variables aléatoires $X_n$ sur $\Omega$ convergent en moyenne d'ordre $p$ vers $X_\infty$, alors elles convergent également en probabilités.

Trouver une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ convergent en moyenne d'ordre $p$ pour tout $p \geqslant 1$ vers la fonction nulle sans converger ponctuellement.

---

*Suite de polynômes.* Soit $(P_n)$ une suite de fonctions polynomiales convergent uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $f$. Montrer que $f$ est un polynôme.

---

*Convergence uniforme et uniforme continuité.* Montrer que la limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

*Suite de polynômes.* Soit $(P_n)$ une suite de fonctions polynomiales convergent uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction $f$. Montrer que $f$ est un polynôme.

---

*Une équation fonctionnelle.* Trouver une fonction dérivable non nulle $u : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in [0,1], u'(x) = u(x-x^2)$. On pourra pour cela introduire la suite $u_0 : x \longmapsto 1$ et $u_{n+1} : x \longmapsto 1+\int_0^x u_n(t-t^2)\mathrm{d}t$.

---

*Dénombrement des arbres binaires.* Soit $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite du nombre d'arbres binaires à $n$ nœuds. Trouver une formule de récurrence permettant de calculer $C_{n+1}$. On admet que $C_n \leqslant 4^n$ (par des arguments d'informatique théorique) ; en introduisant la série génératrice de $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$, donner la valeur de $C_n$.

---

*Critère de convergence de Cauchy–Hadamard.* Rappeler pourquoi, pour toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la quantité $\lim_{n\to\infty} \sup\{u_k : k \geqslant n\}$ est bien définie dans $\bar{\mathbf{R}}$. On note cette quantité $\limsup_{n\to\infty} u_n$.

Montrer que si $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{\rho}$, avec comme convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

En déduire le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} n^{-\log n} z^n$ et de $\sum_{n\geqslant 0} \left(\cos^{n^\alpha} \frac{1}{n}\right) z^n$ où $\alpha$ est un réel donné.

---

*Dénombrement des dérangements.* Soit $N(n,p)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement $p$ points fixes. Exprimer $N(n,p)$ en fonction de $N(n-p,0)$. En introduisant la fonction génératrice exponentielle de $(N(n,0))_{n\in\mathbf{N}}$, calculer $N(n,p)$.

---

*Convergence $L^p$.* On définit les convergences en moyenne d'ordre $p$ et $q$. Montrer que si $p > q$, alors pour une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur un compact,

$$(f_n)_n \text{ CVU vers } f \implies (f_n)_n \text{ vers } f \text{ en moyenne d'ordre } p \implies f \text{ converge vers } f \text{ en moyenne d'ordre } q.$$

On pourra admettre l'inégalité de Jensen pour cela.

Soit $\Omega := [0,1]$. Montrer que si les variables aléatoires $X_n$ sur $\Omega$ convergent en moyenne d'ordre $p$ vers $X_\infty$, alors elles convergent également en probabilités.

Trouver une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ convergent en moyenne d'ordre $p$ pour tout $p \geqslant 1$ vers la fonction nulle sans converger ponctuellement.

*Dénombrement des dérangements.* Soit $N(n,p)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant exactement $p$ points fixes. Exprimer $N(n,p)$ en fonction de $N(n-p,0)$. En introduisant la fonction génératrice exponentielle de $(N(n,0))_{n\in\mathbf{N}}$, calculer $N(n,p)$.

---

*Problème de McDonalds.* Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $a_1,\dots,a_p$ $p+1$ entiers naturels non nuls. Notons $V_n$ le nombre de $p$-uplets $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbf{N}^p$ tels que :

$$x_1a_1 + \cdots + x_pa_p = n$$

Montrer que $\sum V_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur à 1 et calculer sa valeur sur $D(0,1)$.

---

*Convergence d'intégrales et continuité.* Soit $f : [a,\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue d'intégrale convergente. Montrer que $f$ a limite nulle en $+\infty$.

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $f$ seulement continue ?

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathbf{R}$ telle que $\int_{\mathbf{R}_+} f$ et $\int_{\mathbf{R}_+} (f')^2$ convergent. Montrer que $f$ a limite nulle en $+\infty$.

---

*Convergence d'intégrales et séries partielles.* Soit $f : [a,b[ \longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que $\int_a^b f$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite $b$, $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ converge.

---

*Intégrale de Gauss.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,\sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

En effectuant des changements de variable en cos et tan, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pourra se rappeler les intégrales de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

---

*Permutations des bornes.* Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{C}$ continue admettant des limites finies en 0 et $\infty$. Soient $0 < a < b$ deux réels. Calculer :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\mathrm{d}x$$

---

*Règle d'Abel.* Soient $f, g : [a,\infty[ \longmapsto \mathbf{R}$ telles que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ décroissante de limite nulle en $\infty$, et $g$ continue ait ses primitives bornées.

Montrer que $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ converge.

*Convergence d'intégrales et continuité.* Soit $f : [a,\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue d'intégrale convergente. Montrer que $f$ a limite nulle en $+\infty$.

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose $f$ seulement continue ?

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longmapsto \mathbf{R}$ telle que $\int_{\mathbf{R}_+} f$ et $\int_{\mathbf{R}_+} (f')^2$ convergent. Montrer que $f$ a limite nulle en $+\infty$.

---

*Intégrale de Gauss.* Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

En effectuant des changements de variable en cos et tan, en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$. On pourra se rappeler les intégrales de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

---

*Permutations des bornes.* Soit $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{C}$ continue admettant des limites finies en 0 et $\infty$. Soient $0 < a < b$ deux réels. Calculer :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \mathrm{d}x$$

---

*Règle d'Abel.* Soient $f, g : [a,\infty[\longmapsto \mathbf{R}$ telles que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ décroissante de limite nulle en $\infty$, et $g$ continue ait ses primitives bornées.

Montrer que $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ converge.

---

*Théorème de Cantor-Bernstein et calculs de cardinalité.* Soient $X$ un ensemble et $h : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ croissante. Démontrer que $h$ admet un point fixe.

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. L'on suppose qu'il existe deux injections $f : E \hookrightarrow F$ et $g : F \hookrightarrow E$. Au moyens de l'application $h : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E), Y \longmapsto E\backslash g\left(F\backslash f(Y)\right)$, construire une bijection entre $E$ et $F$.

À l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathbf{R}^{\mathbf{Q}} \approx \mathbf{R}$, puis que $\mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \approx \mathbf{R}$.

---

*Indicatrice d'Euler.* L'on définit $\varphi$ l'indicatrice d'Euler. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. En calculant $\zeta(x)S$, déterminer pour $x > 2$ :

$$S := \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varphi(n)}{n^x}$$

---

*Fonction de Möbius.* L'on définit $\mu$ la fonction de Möbius. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_1^n$. En calculant $\zeta(2)S$, déterminer la valeur de :

$$S := \sum_{n \geqslant 0} \frac{\mu(n)}{n^2}$$

---

*PGCD.* Calculer la somme suivante :

$$\sum_{p,q \in \mathbf{N}^*; p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$$

L'on pourra utiliser que $\left(\mathbf{N}^*\right)^2 = \coprod_{d \geqslant 1} \{(p,q) \in \left(\mathbf{N}^*\right)^2 \ : p \wedge q = d\}$, et admettre que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

---

*Exponentielles.* Calculer : $\sum_{p,q \in \mathbf{N}^*} \frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}$.

---

*Nombre d'Apéry.* Montrer l'égalité :

$$\zeta(3) = \int_0^1 \frac{\log(t)\log(1-t)}{t} \mathrm{d}t$$

*Transformation de fonction.* Démontrer que pour tout réel $a$ :

$$\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

*Somme de lois de Poisson.* Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On suppose que $X \equiv \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \equiv \mathcal{P}(\mu)$ et $X$ est indépendante de $Y$. Quelle est la loi de $X+Y$ ?

---

*Atomes de tribus.* Soient $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur $\Omega$. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'on pose :

$$C(\omega) := \cap_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \omega \in A}} A$$

Montrer que $\{C(\omega) : \omega \in \Omega\}$ est une partition de $\Omega$, plus fine que $\mathcal{A}$.

Supposons $\mathcal{A}$ infinie. Justifier l'existence de $(\omega_i)_{i \in \mathbf{N}}$ telle que $(C(\omega_i))_{i \in \mathbf{N}}$ soit injective puis pour $i \neq j$, de $A_i^j$ tel que $x_i \in A_i^j$ et $x_j \notin A_i^j$.

Montrer que l'application suivante est injective.

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathcal{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & & I & \longmapsto & \cup_{i \in I} \cap_{j \neq i} A_i^j \end{array}$$

Qu'en conclut-on quant à la cardinalité d'une tribu .

---

*Lemme de Borel-Cantelli.* Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\limsup_{n \to \infty} A_n := \cap_{n \in \mathbf{N}} \cup_{k \geqslant n} A_k$ est un événement. Comment l'interpréter ?

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. L'on suppose que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\limsup_{n \to \infty}\right) = 0$. Application : soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $Y$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $\Omega$, et $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle. Que peut-on dire si $\forall m \in \mathbf{N}$, $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}\left(|X_n - Y| > \varepsilon_m\right) < \infty$.

L'on suppose maintenant les $A_n$ mutuellement indépendants et $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) = \infty$. Montrer que $\mathbf{P}(\limsup_{n \in \mathbf{N}}) = 1$.

---

*Différents modes de convergence.* Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $Y$ des variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. L'on note $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}} Y$ si $\mathbf{P}[|X_n - Y| > \varepsilon] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ (convergence en probabilités), et pour $p > 1$, $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^p} Y$ si $\mathbf{E}[|X_n - Y|^p] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (convergence $L^p$).

Montrer que pour tout $p > 1$, si $X_n$ converge $L^p$ vers $Y$, alors $X_n$ converge en probabilités vers $Y$.

---

*Indicatrice d'Euler.* L'on définit $\varphi$ l'indicatrice d'Euler. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. En calculant $\zeta(x)S$, déterminer pour $x > 2$ :

$$S := \sum_{n \geqslant 0} \frac{\varphi(n)}{n^x}$$

---

*Fonction de Möbius.* L'on définit $\mu$ la fonction de Möbius. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_1^n$. En calculant $\zeta(2)S$, déterminer la valeur de :

$$S := \sum_{n \geqslant 0} \frac{\mu(n)}{n^2}$$

---

*PGCD.* Calculer la somme suivante :

$$\sum_{p,q \in \mathbf{N}^*; p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$$

L'on pourra utiliser que $(\mathbf{N}^*)^2 = \coprod_{d \geqslant 1} \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 \ : p \wedge q = d\}$, et admettre que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

*Atomes de tribus.* Soient $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur $\Omega$. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'on pose :

$$C(\omega) := \cap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ \omega\in A}} A$$

Montrer que $\{C(\omega) : \omega \in \Omega\}$ est une partition de $\Omega$, plus fine que $\mathcal{A}$.

Supposons $\mathcal{A}$ infinie. Justifier l'existence de $(\omega_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $(C(\omega_i))_{i\in\mathbf{N}}$ soit injective puis pour $i \neq j$, de $A_i^j$ tel que $x_i \in A_i^j$ et $x_j \notin A_i^j$.

Montrer que l'application suivante est injective.

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & & I & \longmapsto & \cup_{i\in I} \cap_{j\neq i} A_i^j \end{array}$$

Qu'en conclut-on quant à la cardinalité d'une tribu .

---

*Lemme de Borel-Cantelli.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n\in\mathbf{N}} \cup_{k\geqslant n} A_k$ est un événement. Comment l'interpréter ?

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. L'on suppose que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\right) = 0$. Application : soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $Y$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $\Omega$, et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle. Que peut-on dire si $\forall m \in \mathbf{N}$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}\left(|X_n - Y| > \varepsilon_m\right) < \infty$.

L'on suppose maintenant les $A_n$ mutuellement indépendants et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n) = \infty$. Montrer que $\mathbf{P}(\limsup_{n\in\mathbf{N}}) = 1$.

---

*Différents modes de convergence.* Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $Y$ des variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. L'on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{P}} Y$ si $\mathbf{P}[|X_n - Y| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ (convergence en probabilités), et pour $p > 1$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Y$ si $\mathbf{E}[|X_n - Y|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (convergence $L^p$).

Montrer que pour tout $p > 1$, si $X_n$ converge $L^p$ vers $Y$, alors $X_n$ converge en probabilités vers $Y$.

---

*Dé truqué.* Déterminer les racines complexes du polynôme $X^2 + \cdots + X^{12}$. En déduire que la somme de deux dés à six faces éventuellement truqués ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

---

*Traitement d'un processus.* Un agent reçoit $X$ données à traiter, $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Il délègue une partie du travail à $s$ subordonnés, avec probabilité $p_i$ de le déléguer chaque traitement de donnée au subordonné $i$, ce de façon indépendante. Calculer la loi du nombre de données à traiter par chaque agent.

---

*Niveau d'un test.* Un laboratoire pharmaceutique produit un test contre une maladie rare, atteignant une personne sur dix-mille. Si un patient testé est malade, le test a 99 % de chances d'être positif, et $0,1$ % seulement si le patient testé n'est pas malade. Peut-on considérer ce test comme fiable ?

---

*A priori.* Une personne, que l'on croît avoir une probabilité $p$ d'être un tricheur, parie qu'il obtiendra pile s'il lance une pièce non truquée, la lance, et obtient effectivement pile. Que peut-on alors dire de la probabilité qu'il soit un tricheur ?

---

*Identité de Wald.* Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires naturelles indépendantes et identiquement distribuées. Soit $N$ à valeur dans $\mathbf{N}$ et indépendante des précédentes. L'on note $S := \sum_{k=1} X_k$. Déterminer la fonction génératrice de $S$ en fonction de celles de $N$ et de $X_1$, en déduire $\mathbf{E}[S]$ si $N$ et $X_1$ sont sommables.

---

*Théorème de Weierstraß (Mines 2015).* Choisissons $f$ une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$ avec $x \in [0, 1]$. Notons $X_n := \frac{S_n}{n}$. Montrer que $\forall\alpha > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.

Soient $Y_n = f(X_n)$ et $B_n(f) : x \longmapsto \mathbf{E}[Y_n]$. Vérifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale. Montrer que $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$, et en déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

*Crochet de Lie.* Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ telles que $AB - BA = A$. En calculant par récurrence $A^kB - BA^k$, montrer que $A$ est nilpotente.

---

*Théorème de Gerschgorin.* Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbf{C}^n$. L'on note $R_i := \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ et $S_j := \sum_{i\neq j} |a_{i,j}|$. Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n D(a_ii, R_i)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n D(a_ii, S_i)\right)$$

On pourra commencer par montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

---

*Localisation des valeurs propres d'une matrice stochastique.* Soit $A$ une matrice stochastique, c'est-à-dire à coefficients positifs et dont la somme des termes sur chaque ligne vaut 1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$, puis que $\mathrm{Sp}(A) \subsetneq D(0,1)$.

On suppose les coefficients de $A$ strictement positifs ; montrer que la seule valeur propre de module 1 de $A$ est 1.

---

*Spectre d'une comatrice.* Soit $A$ une matrice carrée complexe. Déterminer le spectre de $\mathrm{Com}\, A$ en fonction de celui de $A$.

---

*Application linéaire transposée.* Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie, de base respective $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Notons $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ leur base duale.

Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'on pose ${}^tu : \varphi \mapsto \varphi \circ u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. Trouver une relation entre $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}(u)$.

Soit $H$ un hyperplan de $E$. Montrer que $H$ est stable par $u \in E$ si, et seulement si $H$ est le noyau d'une forme linéaire $\varphi$ sur $F$, vecteur propre de ${}^tu$.

---

*Théorème de Weierstraß (Mines 2015).* Choisissons $f$ une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ avec $x \in [0,1]$. Notons $X_n := \frac{S_n}{n}$. Montrer que $\forall \alpha > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - x| > \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.

Soient $Y_n = f(X_n)$ et $B_n(f) : x \longmapsto \mathbf{E}[Y_n]$. Vérifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale. Montrer que $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$, et en déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

---

*Identité de Wald.* Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires naturelles indépendantes et identiquement distribuées. Soit $N$ à valeur dans $\mathbf{N}$ et indépendante des précédentes. L'on note $S := \sum_{k=1} X_k$. Déterminer la fonction génératrice de $S$ en fonction de celles de $N$ et de $X_1$, en déduire $\mathbf{E}[S]$ si $N$ et $X_1$ sont sommables.

---

*Loi de Poisson et loi binomiale.* Un agent reçoit $X$ données à traiter, $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Il délègue une partie du travail à $s$ subordonnés, avec probabilité $p_i$ de le déléguer chaque traitement de donnée au subordonné $i$, ce de façon indépendante. Calculer la loi du nombre de données à traiter par chaque agent.

---

*Algèbres commutatives intègres de dimension finie.* Soient $\mathbf{K}$ un corps, et $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbf{K}$-algèbre commutative intègre de dimension finie. Quelle est la propriété à vérifier pour montrer que $A$ est un corps ?

Le montrer en étudiant pour $a \neq 0$ l'application $A \longrightarrow A$, $x \longmapsto a \times x$.

Le redémontrer en étudiant la famille $(a^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

---

*Caractérisation des combinaisons linéaires de formes linéaires* Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\psi_1$, …, $\psi_n$ et $\varphi$ des formes linéaires sur $E$. L'on cherche à montrer que

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \iff \bigcap_{i=1}^n \ker \psi_n \subseteq \ker \varphi$$

Montrer le sens direct. Vérifier que le sens réciproque peut se ramener au cas où $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ est une famille libre. Le prouver en étudiant le noyau de l'application :

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ x & \longmapsto & (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \varphi(x)) \end{array}$$

---

*La comatrice est multiplicative* Soient $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathrm{Com}(MN) = \mathrm{Com}(M)\,\mathrm{Com}(N)$.

Calculer $\mathrm{Com}(M)$ dans le cas où $M$ est une matrice de rang inférieur ou égal à $n-2$. Montrer que pour $M, N \in GL_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{rg}(MN) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, M, \mathrm{rg}\, N)$. En déduire que $\mathrm{Com}(MN) = \mathrm{Com}(M)\,\mathrm{Com}(N)$ dès que $\mathrm{rg}(M) \leqslant n-2$ ou $\mathrm{rg}(N) \leqslant n-2$.

Soit $F = \mathbf{K}(X_1, \dots, X_{n^2}, Y_1, \dots, Y_{n^2})$ le corps des fractions rationnelles à $2n^2$ variables. En appliquant les résultats précédents aux matrices

$$M := \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n & \dots & X_{n^2} \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n & \dots & Y_{n^2} \end{pmatrix}$$

et en se rappelant que l'évaluation d'une fraction rationnelle en un point de son ensemble de définition est un morphisme de corps, montrer que l'application comatrice est multiplicative.

*Théorème de Carathéodory* Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $P$ une partie non vide de $E$. Montrer que $\operatorname{Conv}(P)$ est l'ensemble des barycentres de systèmes pondérés de $n+1$ points de $P$.

En déduire que, si $P$ est compacte, alors $\operatorname{Conv}(P)$ l'est également.

---

*Spectre d'une comatrice.* Soit $A$ une matrice carrée complexe. Déterminer le spectre de $\operatorname{Com} A$ en fonction de celui de $A$.

---

*Application linéaire transposée.* Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels de dimension finie, de base respective $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Notons $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ leur base duale.

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'on pose ${}^t u : \varphi \mapsto \varphi \circ u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. Trouver une relation entre $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $M_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}(u)$.

Soit $H$ un hyperplan de $E$. Montrer que $H$ est stable par $u \in E$ si, et seulement si $H$ est le noyau d'une forme linéaire $\varphi$ sur $F$, vecteur propre de ${}^t u$.

---

*Crochet de Lie.* Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ telles que $AB - BA = A$. En calculant par récurrence $A^k B - BA^k$, montrer que $A$ est nilpotente.

---

*Théorème de Gerschgorin.* Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbf{C}^n$. L'on note $R_i := \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ et $S_j := \sum_{i\neq j} |a_{i,j}|$. Montrer que :

$$\operatorname{Sp}(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} D(a_i i, R_i)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} D(a_i i, S_i)\right)$$

On pourra commencer par montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

---

*Localisation des valeurs propres d'une matrice stochastique.* Soit $A$ une matrice stochastique, c'est-à-dire à coefficients positifs et dont la somme des termes sur chaque ligne vaut 1. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp}(A)$, puis que $\operatorname{Sp}(A) \subsetneq D(0,1)$.

On suppose les coefficients de $A$ strictement positifs ; montrer que la seule valeur propre de module 1 de $A$ est 1.

---

*Décomposition de Fröbenius.* Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ un endomorphisme de $K$ et $x \in E$. Montrer l'existence d'un unique polynôme $\pi_{u,x}$ unitaire de degré minimal tel que $\pi_{u,x} u(x) = 0_E$.

Soit $P = \prod_{k=1}^{n} P_k^{\alpha_k}$ le polynôme minimal de $P$ décomposé en facteurs irréductibles premiers deux à deux. Justifier l'existence de $x_k \in \ker P_k^{\alpha_k} u$ tel que $\pi_{u,x_k} = P_k^{\alpha_k}$. En déduire l'existence de $x_0 \in E$ tel que $\pi_{u,x_0} = P$.

On note $S$ le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ et contenant $x$. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ en est une base, avec $d = \deg P$. Quel est le polynôme minimal de $u_{|E}$ ?

On admet que $S$ possède un supplémentaire stable par $u$. Montrer que dans une certaine base, la matrice de $u$ est diagonale par blocs, avec blocs de la forme $C(P), C(P_2), \ldots, C(P_m)$ où $P_m | \ldots | P_1 | P_1$.

---

*Endomorphismes cycliques.* Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

$(i)$ $\pi_n = \chi_n$

$(ii)$ Il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $E$

$(iii)$ Il existe une base de $E$ dans laquelle $u$ ait pour matrice une matrice compagnon.

---

*Une autre preuve du théorème de Cayley-Hamilton (difficile).* Dans cet exercice, on n'utilisera pas le théorème de Cayley-Hamilton.

Soient $k$ un corps et $n$ un entier. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable dans $k$, alors son $\chi_M$ annule $M$.

On pose $K = k\left((X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$ le corps des fractions rationnelles en $n^2$ indéterminées et $\bar{K}$ un corps algébriquement clos contenant $K$ (dont on admet l'existence). On note $U$ la matrice universelle $(X_{i,j})$, dont les coefficients sont indéterminés, et $\chi_U \in K[T] = \det(TI_n - U)$.

Montrer que les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}$ de $\chi_U$ dans $\bar{K}$ sont simples. L'on pourra admettre que $\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^2} (\alpha_i - \alpha_j) \in K$.

En déduire que $U$ est diagonalisable dans $K$, puis démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

*Réciproque de l'inégalité de Bessel.* Soient $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien et $\pi$ une projection de $E$. On suppose que $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que $\pi$ est une projection orthogonale de $E$.

---

*Dual d'un espace de Hilbert.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien réel admettant la propriété suivante :

(H) Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Montrer que cette propriété est vérifiée automatiquement si l'on suppose $E$ de dimension finie.

L'on suppose maintenant $E$ de dimension infinie et vérifiant la propriété (H). Montrer que $E$ est isométrique à $E'$, l'ensemble des formes linéaires *continues* sur $E$.

Montrer qu'en dimension infinie, la propriété (H) est également vérifiée s'il existe une famille orthonormale de $E$ engendrant un sous-espace vectoriel dense (base hilbertienne). Donner un exemple d'espace préhilbertien de dimension infinie ne vérifiant pas la propriété (H).

---

*Théorème de Carathéodory.* Soient $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $P$ une partie non vide de $E$. Montrer que $\mathrm{Conv}(P)$ est l'ensemble des barycentres de systèmes pondérés de $n+1$ points de $P$.

En déduire que, si $P$ est compacte, alors $\mathrm{Conv}(P)$ l'est également.

---

*Inégalité de Jensen.* Soit $f$ une fonction réelle convexe sur un convexe $P$. Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs de somme 1, et $x_1, \ldots, x_n \in P$, alors $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.

On suppose maintenant $f$ continue par morceaux, définie sur un intervalle réel $[a, b]$ et à valeurs dans un intervalle $I$, et $\varphi$ convexe de $I$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\mathrm{d}t$$

En déduire que si une suite de fonctions continues par morceaux $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur un intervalle $[a, b]$ convergent en norme $L^p$ ($p \geqslant 1$) vers une fonction $f_\infty$ continue par morceaux, alors elle converge également en norme $L^q$ pour tout $q \geqslant p$.

---

*Matrice de Gram.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour toute famille de points $x_1, \ldots, x_n \in E$, l'on note $G(x_1, \ldots, x_n) := ((\langle x_i | x_j \rangle)_{i,j})$.

Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre et $(e_1, \ldots, e_n)$ obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, alors $G(e_1, \ldots, e_n)$ est triangulaire supérieure et donner son déterminant. Le majorer selon les normes des $x_i$.

Justifier que plus généralement, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $P$ pour matrice de passage, alors $G(x_1, \ldots, x_n) = P^{\perp}P$. En déduire qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si, et seulement si $\det G(x_1, \ldots, x_n) > 0$. Montrer que la matrice suivante est définie positive :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de base $(x_1, \ldots, x_n)$, et $x \in E$, alors :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}}$$

En déduire la valeur de :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_{0,1} (x^2 - ax - b)\mathrm{d}t$$

*Polynôme.* Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout polynôme $Q \in \mathbf{R}_n[X]$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{t}) e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

*Polynôme.* Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout polynôme $Q \in \mathbf{R}_n[X]$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{t})e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

---

*Matrice de Gram.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour toute famille de points $x_1, \ldots, x_n \in E$, l'on note $G(x_1, \ldots, x_n) := ((\langle x_i | x_j \rangle)_{i,j})$.

Justifier que généralement si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $P$ pour matrice de passage, alors $G(x_1, \ldots, x_n) = P^{\perp}P$. En déduire qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si, et seulement si $\det G(x_1, \ldots, x_n) > 0$. Montrer que la matrice suivante est définie positive :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de base $(x_1, \ldots, x_n)$, et $x \in E$, alors :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}}$$

En déduire la valeur de :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_{0,1} (x^2 - ax - b)\mathrm{d}t$$

---

*Dual d'un espace de Hilbert.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie. Montrer que l'injection canonique $J : E \longrightarrow E^*$ a en fait son image dans $E'$, l'ensemble des formes linéaires *continues* sur $E$.

On suppose que $E$ a de plus la propriété (H) : pour tout sous-espace vectoriel $F$ fermé de dimension infinie, $F$ contient une suite orthonormée totale.

Montrer que l'orthogonal de tout sous-espace fermé de $E$ est son supplémentaire. En déduire que $J$ est en fait surjective sur $E'$.

---

*Espaces de Hilbert séparables.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien contenant une suite orthonormée totale. Montrer que $E$ est isométrique à $\ell^2(\mathbf{R})$. L'on pourra admettre que toute suite absolument convergente pour la norme euclidienne est convergente.

---

*Famille totale et maximalité.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer qu'une famille orthonormée dénombrable est totale si et seulement si elle est maximale, *ie* si l'on ne peut plus ajouter de vecteur sans perdre son caractère orthonormé.

---

*Orthogonal dans un espace préhilbertien.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour $F$ un sous-espace de $E$, déterminer une relation d'inclusion entre $F$ et $F^{\perp\perp}$.

Trouver un espace $E$ possédant une famille totale et un sous-espace $F$ tel que l'inclusion soit stricte.

L'on souhaite maintenant trouver un exemple d'inclusion stricte où $F$ est *fermé*. Soit $E := \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) : f(0) = 0\}$. Montrer que $F := \{f \in E \ : f(1) = 0\}$ convient.

Montrer qu'il y a toujours égalité dès que $E$ est de dimension finie.

---

*Réciproque de l'inégalité de Bessel.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\pi$ une projection de norme d'opérateur 1. Montrer que $E$ est une projection orthogonale.

*Exponentielle et matrices antisymétriques.* Déterminer l'image de l'ensemble des matrices antisymétriques par la fonction exponentielle.

---

*Exponentielle et matrices symétriques.* Déterminer l'image de l'ensemble des matrices symétriques par la fonction exponentielle.

---

*Réduction des endomorphismes normaux.* Soit $A$ une matrice réelle d'ordre $n$ ; l'on dit que $A$ est normale si $A^tA =^t AA$. Montrer que la normalité est invariante par orthosimilitude. L'on dit donc d'un endomorphisme qu'il est normal si sa matrice dans une base orthonormée l'est également.

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ euclidien. Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $H$ stable par $f$, alors $F^\perp$ l'est également. Montrer que l'endomorphisme induit par $f$ est normal également. En déduire que $E$ est somme directe orthogonale d'espaces de dimension au plus deux stables par $F$, et que les endomorphismes induits par $f$ sont de polynôme minimal irréductible.

En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle $f$ s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale par blocs avec blocs d'ordre un ou de forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

En déduire une réduction des matrices antisymétriques.

---

*Dual d'un espace de Hilbert.* Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie. Montrer que l'injection canonique $J : E \longrightarrow E^*$ a en fait son image dans $E'$, l'ensemble des formes linéaires *continues* sur $E$.

On suppose que $E$ a de plus la propriété (H) : pour tout sous-espace vectoriel $F$ fermé de dimension infinie, $F$ contient une suite orthonormée totale.

Montrer que l'orthogonal de tout sous-espace fermé de $E$ est son supplémentaire. En déduire que $J$ est en fait surjective sur $E'$.

---

*Wronskien mixte.* Soit $\varphi$ une solution des $y'' + e^x y = 0$ sur $\mathbf{R}$. En étudiant le wronskien mixte $\begin{vmatrix} \varphi & \sin \\ \varphi' & \cos \end{vmatrix}$, démontrer que $\varphi$ s'annule sur tout intervalle de la forme $]2n\pi, (2n+1)\pi[$.

---

*Composition et équation différentielle.* Soit $f$ et $g$ continue $I \longrightarrow L(F)$ avec $I = ]a, b[$ et $F = \mathbf{R}^n$. Posons $t_0 \in I$.

Montrer que les systèmes suivants sont des problèmes de Cauchy :

$$(C_1) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(t) \circ y \\ y(t_0) & = & id_F \end{array} \right. \qquad (C_2) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -y \circ f(t) \\ y(t_0) & = & id_F \end{array} \right.$$

Exprimer la solution $u$ de $(C_2)$ en fonction de celle $v$ de $(C_1)$. L'on pourra pour cela étudier $t \longmapsto u(t) \circ v(t)$.

*Wronskien mixte.* Soit $\varphi$ une solution des $y'' + e^x y = 0$ sur $\mathbf{R}$. En étudiant le wronskien mixte $\begin{vmatrix} \varphi & \sin \\ \varphi' & \cos \end{vmatrix}$, démontrer que $\varphi$ s'annule sur tout intervalle de la forme $]2n\pi, (2n+1)\pi[$.

---

*Composition et équation différentielle.* Soit $f$ et $g$ continue $I \longrightarrow L(F)$ avec $I = ]a, b[$ et $F = \mathbf{R}^n$. Posons $t_0 \in I$.

Montrer que les systèmes suivants sont des problèmes de Cauchy :

$$(C_1) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(t) \circ y \\ y(t_0) & = & id_F \end{array} \right. \qquad (C_2) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -y \circ f(t) \\ y(t_0) & = & id_F \end{array} \right.$$

Exprimer la solution $u$ de $(C_2)$ en fonction de celle $v$ de $(C_1)$. L'on pourra pour cela étudier $t \longmapsto u(t) \circ v(t)$.

---

*Transformation d'équation différentielle* Soient $I$ un intervalle ouvert non trivial de $\mathbf{R}$, $a, b, c : I \longmapsto \mathbf{R}$ continues avec $a$ ne s'annulant pas sur $I$ et $b < c$. L'on note $(H_1) y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ et $(H_2) : y'' + a(t)y' + c(t)y = 0$. Soient $\varphi$ et $\psi$ des solutions non nulles de $(H_1)$ et $(H_2)$. L'on souhaite montrer qu'entre deux zéros consécutifs de $\varphi$ il existe un zéro de $\psi$.

Montrer par un changement de fonction astucieux que l'on peut se ramener à l'étude de $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$, solutions respectives de $y'' + \beta(t)y = 0$ et $y'' + \gamma(t)y = 0$ avec $\beta < \gamma$. Démontrer l'énoncé.

L'on suppose que $\varphi$ est solution de $y'' + \beta(t)y = 0$ avec $\beta$ bornée par $]\omega^2, \Omega^2[$. Montrer que $\varphi$ possède une infinité de zéros, et majorer l'écart entre deux zéros consécutifs.

---

*Résolvante.* Soit $F = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. L'on se donne $A : I \longmapsto F$ continue. Soit $(E) : M' = A(t)M$ dans $F$.

Justifier que $(E)$ admet une unique solution $R$ telle que $R(0) = I_n$. Démontrer que $\det R$ est solution de $y' = \mathrm{tr}(A(t))y$, et en déduire que $R(t)$ est inversible pour tout $t$. Exprimer la solution de $X' = A(t)X, X(0) = V \in \mathbf{C}^n$ en fonction de $R$. Que vaut $R$ si $A$ est constante ?

---

*Périodicité.* Soit $F = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. L'on se donne $A : I \longmapsto F$ continue. Soit $(H) : X' = A(t)X$, et supposons $A$ périodique de période $\tau$.

Montrer qu'une solution $X$ de $(H)$ est périodique de période $\tau$ si, et seulement si $X(0) = X(\tau)$.

Soit $R$ l'unique solution de $M' = A(t)M$ telle que $R(0) = I_n$. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $R(t + \tau) = R(t)R(\tau) = R(\tau)R(t)$.

Soit $(E) : M' = A(t)M$ dans $F$.

*Supremum.* Déterminer $\sup_{M \in O_n(\mathbf{R})} \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} m_{i,j}$.

L'on pourra pour cela mettre le terme à maximiser sous la forme $\langle K|M \rangle$ avec $K$ à déterminer, puis justifier que le supremum est atteint en un certain $M_0$. En traçant sur $O_n(\mathbf{R})$ des arcs passant par $M_0$ et en annulant la dérivée de $\langle K|\cdot\rangle$ selon ces arcs, déterminer une valeur de ce supremum en fonction des valeurs propres de ${}^tK \times K$.

---

*Dérivations.* Soit

$$\Delta := \{L \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})^* \ : \forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), L(fg) = g(0) \cdot L(f) + f(0) \cdot L(g)\}$$

Trouver une famille libre très simple de $L$ à $n$ éléments. Justifier que $L$ annule les fonctions constantes.

En écrivant $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ sous la forme $c + \sum_{i=1}^n g_i e_i^*$ avec $c$ constante, $e_i^*$ les formes linéaires coordonnées et $g_i$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ astucieusement déterminée, montrer que la famille libre précédemment déterminée est une base.

---

*Norme euclidienne.* Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Démontrer que la norme euclidienne $N$ est différentiable sur $E \backslash \{0\}$, et non différentiable en 0. Déterminer son gradient.

---

*Laplacien.* Soit $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ différentiable deux fois. L'on pose $F : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}$ telle que $\forall (r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $F(r, \theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que $f$ est deux fois différentiable sur son ensemble de définition, puis que :

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

---

*Algèbres de Lie.* Soit $G$ un sous-groupe fermé $GL_n(\mathbf{R})$. L'on note :

$$\mathfrak{g} = \{\gamma'(0) \ : \exists \varepsilon > 0, \gamma : \mathcal{C}^1\left(]-\varepsilon, \varepsilon[, G\right), \gamma(0) = I_n\}$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel. Soient $M, N \in \mathfrak{g}$. En considérant $\gamma$ et $\eta$ comme dans la définition et en étudiant $s, t \longmapsto \gamma(s)\eta(t)\gamma^{-1}(s)$, démontrer que $[M, N] := MN - NM \in \mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ *est appelée l'algèbre de Lie de* $G$.

Justifier que $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $\forall t \in \mathbf{R}$, $\exp(tM) \in G$. *L'on pourra admettre que* exp *est inversible au voisinage de* 0, *et que* $\mathrm{d}\log(I_n) = id$.

En déduire $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{R})$, $\mathfrak{o}_n(\mathbf{R})$ et $\mathfrak{so}_n(\mathbf{R})$.

*Parties d'un ensemble.* Soit $E$ un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe. Montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^E$.

---

*Sous-groupes de* $\mathbf{R}$. Démontrer que tout sous-groupe de $\mathbf{R}$ est soit de la forme $\alpha\mathbf{Z}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$, soit dense dans $\mathbf{R}$. L'on pourra pour cela considérer $\inf G \cap \mathbf{R}_+^*$.

En déduire que $\{2^n 3^m : m, n \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans $\mathbf{R}_+$.

---

*Groupes d'ordre $p^2$.* Soit $G$ un groupe d'ordre $p^2$ avec $p$ premier. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ ou à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^2$. L'on pourra commencer par admettre que $G$ est abélien.

Pour le démontrer, commencer par admettre que le centre de $G$ est non trivial. Puis prouver ce dernier résultat de façon plus générale pour tout groupe d'ordre $p^n$ en étudiant l'application $Z(G) \times G \longrightarrow G, (z, g) \longmapsto z^{-1}gz$ (hors-programme).

---

*Théorème de Cauchy.* Soit $G$ un groupe fini d'ordre $n$. Pour $p$ un diviseur de $n$, l'on pose

$$E = \{(x_1, \ldots, x_p) : x_1 x_2 \ldots x_p = e\}$$

et $\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(G)$ morphisme de groupes tel que $\varphi(\bar{1})(x_1, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_1, x_p)$.

En étudiant la relation $xRy \iff \exists g \in G : y = \varphi(g)(x)$, justifier l'existence d'un élément d'ordre $p$ dans $G$.

*Valeur moyenne de fonctions périodiques.* L'on souhaite démontrer que pour tous $M > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n$ fonctions $\mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ $2\pi$-périodique et $a_1, \ldots, a_n$ réels formant une famille libre du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, l'on a :

$$\frac{1}{T}\int_M^T \prod_{k=1}^n f_k(a_k t)\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to\infty]{} \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que ce résultat est vrai dans le cas où les $f_k$ sont tous des polynômes trigonométriques (de la forme $t \longmapsto \sum_{i=-n}^m c_i \cos(it)$). On pourra pour cela exploiter la multilinéarité des deux membres de l'égalité par rapport aux $f_k$.

À l'aide du théorème de Weierstraß, démontrer que les fonctions $f_k$ peuvent être approchées uniformément sur $\mathbf{R}$ par des polynômes trigonométriques. En déduire, à l'aide du théorème de la double-limite, l'égalité recherchée.

L'on fixe par ailleurs $\varepsilon > 0$ et $b_1, \ldots, b_n$ $n$ réels. Justifier qu'il existe $t > M$ et $n$ entiers naturels $m_1, \ldots, m_k$ tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], |ta_k - b_k - m_k| < \varepsilon$$