Calcul de la dérivée des fonctions trigonométriques. L'on admettra que les fonctions sin et cos, définies géométriquement, sont continues.

L'on admet que l'aire d'une section de disque d'angle au centre α (part de pizza) est proportionnelle à α. La calculer.

À l'aide d'un joli dessin sur le cercle trigonométrique, vérifier l'encadrement :

$$\forall \alpha \in]0,\pi[, \quad \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{1 \times \tan\alpha}{2}$$

En déduire que

$$\forall \alpha \in]0,\pi[, \quad \cos\alpha \leqslant \frac{\sin\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\cos\alpha}$$

En déduire la valeur $\sin'(0)$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. En appliquant une formule bien choisir, exprimer le taux de variation de sin en x à l'aide de produits et quotients uniquement. En déduire la valeur de $\sin'(x)$. De même, calculer $\cos'(x)$.

Une équation fonctionnelle. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que $f \circ g : x \longmapsto x^2$ et $g \circ f : x \longmapsto x^3$. On admet le lemme suivant : pour $h : E \longrightarrow F$ et $k : F \longrightarrow G$, il faut que h soit injective (resp. que k soit surjective) pour que $k \circ h$ soit injective (resp. surjective).

Supposons l'existence de deux telles fonctions f et g. En étudiant $f \circ g \circ f$, trouver une relation simple entre $f(x)$ et $f(x^3)$. En déduire une équation polynomiale vérifiée par $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$. Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation. Conclure.

Démontrer le lemme admis.

Une suite doublement indexée. Soit pour $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $I_{n,k}$ le réel défini par : $I_{n,0} := (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1}$ et $I_{n,k} := -\frac{k}{n+1} I_{n+1,k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

Vérifier que les $I_{n,k}$ sont tous bien définis. On pourra pour cela étudier la propriété $P(k)$: « pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_{n,k}$ est bien défini ».

De façon similaire, vérifier que $\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2$, $I_{n,k} = (-1)^n \frac{2^{n+k+1} n! k!}{(n+k+1)!}$.

La loi normale admet des moments de tout ordre. Soit $f : x \in \mathbf{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \in \mathbf{R}$ la densité de probabilités de la loi normale centrée réduite.

En effectuant le changement de variable $y \to \frac{x^2}{2}$, vérifier que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $x^p f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$. *Cela implique qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ possède une espérance, une variance, et bien d'autres propriétés sympathiques.*

Somme des cubes. On admet connues et démontrées les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $S := \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$. En factorisant S, montrer que $S = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Expliquer pourquoi $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} ij + \sum_{1 \leqslant i = j \leqslant n} ij$. En calculant chacune de ces trois sommes, montrer que $S = \sum_{k=1}^n k^3$. Conclure.

(*) *Lemme de Knaster-Tarski dans* $\mathbf{R}$. Rappeler l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Expliquer à l'aide d'un dessin pourquoi il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Le prouver en étudiant la fonction $g : x \in [0,1] \longmapsto f(x) - x \in \mathbf{R}$.

Soit $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante. Se convaincre à l'aide d'un dessin de l'existence de $x \in [0,1]$ tel que $h(x) = x$.

On admet maintenant que toute intersection d'intervalle de $\mathbf{R}$ est un intervalle. Soit $E \subseteq R$ tel que E soit non vide et tel qu'il existe $C \in \mathbf{R}$, $\forall x \in E$, $x \leqslant C$. Justifier que $\bigcap_{x \in E}]x, \infty[$ est un intervalle de la forme $]M, \infty[$ ou $[M, \infty[$, et en déduire que $\forall x \in E$, $x \leqslant M$ mais que si $N < M$, $\exists x \in E, x > M$. On dira que $M := \sup E$.

Montrer que $E = \{x \in [0,1], x \leqslant h(x)\}$ vérifie les propriétés du paragraphe précédent. Justifier que $\forall x \in E$, $x \leqslant f(\sup E)$, et en déduire que $\sup E \leqslant f(\sup E)$. En déduire que $\sup E$ est un point fixe de f.

Soient a, b et c trois nombres complexes de même module. On note A, B et C respectivement les points associés dans le plan complexe.

Supposons que ABC est équilatéral. Que peuvent valoir b et c en fonction de a ? Montrer que $a+b+c=0$.

Réciproquement, si $a+b+c=0$, exprimer b et c en fonction de a et en déduire que ABC est équilatéral.

On cherche à déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0=1$, $u_1=1-\cos^2\theta$ et $u_{n+1}=2\cos\theta u_{n+1}-u_n$.

Soit $P=X^2-2\cos\theta X+1$. On admet que :

(i) Si P possède deux racines réelles x et y, alors (u_n) est de la forme $(\lambda x^n+\mu y^n)$ où $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$;

(ii) Si P possède une racine double z, alors (u_n) est de la forme $(\lambda z^n+\mu n z^n)$;

(iii) Si P possède deux racines complexes conjuguées distinctes $r\exp^{i\pm\varphi}$, alors P est de la forme $(\lambda r^n\cos(\varphi n)+\mu r^n\sin(\varphi n))$.

Déterminer (u_n) dans le cas où $\theta\notin\pi\mathbf{Z}$, puis si $\theta\equiv 0 \mod \pi$.

Résoudre l'équation en $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & = & 1 \end{array}\right.$$

On pourra essayer d'exprimer un polynôme dont les racines sont x, y et z en fonction des quantités $\sigma_1 := xyz$, $\sigma_2 := xy+yz+xz$ et $\sigma_3 := x+y+z$.

Soient a, b, c trois réels (connus). Résoudre l'équation en $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+a^2z & = & a^4 \\ x+by+b^2z & = & b^4 \\ x+cy+c^2z & = & c^4 \end{array}\right.$$

On pourra pour cela travailler par analyse-synthèse et introduire un polynôme de degré 4 dont les coefficients dépendent de x, y et z dont on connaît trois racines...

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Trouver une équation vérifiée par a et b, en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Calculer $S = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}$. On pourra pour cela introduire $T = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k+1}$ et $U = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}$.

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit irréductible si, et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les multiples de P.

Montrer que X est irréductible sur $\mathbf{C}$. Quels sont les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$?

Montrer que les polynômes de degré 1 sont irréductibles sur $\mathbf{R}$, puis que les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif le sont aussi. Montrer qu'un polynôme de degré trois ou plus n'est pas irréductible dans $\mathbf{R}[X]$. Quels sont les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$?

On rappelle l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. Montrer que l'équation $nx = e^{-x}$ admet une unique solution, que l'on notera u_n. Justifier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Calculer sa limite.

On définit les parties positive et négative d'un réel. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-, et comparer x^+ et x^- à 0 et $|x|$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - x_k|$. Montrer que si $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. On pourra pour cela introduire $T_n = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)^+$, $U_n = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)^6$ et tenter de prouver leur convergence.

Soient I un intervalle fermé non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ une fonction contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Soit $x \in I$; montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite c, et que c est un point fixe de f. On pourra pour cela admettre qu'une fonction contractante est continue, et se souvenir que le passage à la limite est compatible avec les fonctions continues...

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de réels. Justifier l'existence de $\lim_{n\to\infty} \sum k \geqslant nu_k$ et de $\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k$; on note ces deux quantités respectivement $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$. Montrer qu'elles sont égales si et seulement si u_n converge, et qu'en ce cas leur valeur commune est $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la même limite.

Réciproquement, montrer que si pour toute fonction $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. (Indice : ne pas trop réfléchir...)

On désigne par ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)_n$ admette une limite finie.

Montrer que ℓ^2 est un espace vectoriel.

Soit ℓ^2_+ l'espace des suites positives de ℓ^2. Montrer que l'application $u, v \longmapsto \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n u_k v_k$ définit une application sur $\ell^2_+ \times \ell^2_+$.

Les parties suivantes de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sont-elles des espaces vectoriels ? Les suites croissantes, les suites bornées, les suites convergentes, les suites arithmétiques, les suites géométriques.

Les parties suivantes de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ sont-elles des espaces vectoriels ? Les fonctions paires, les fonctions impaires, les fonctions annulant 0, les fonctions admettant une limite en $+\infty$, les fonctions n'admettant pas de telle limite.

Montrer que l'ensemble des suites complexes périodique forme un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbf{R}$-ev. On munit le produit cartésien E^2 de l'addition usuelle et d'une multiplication externe par un complexe :

$$(a+ib).(x,y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$$

Montrer que l'on définit ainsi un $\mathbf{C}$-espace vectoriel

---

Justifier que la famille $(\cos, \sin, x \mapsto x\cos x, x \mapsto x \sin x)$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Montrer que les polynômes interpolateurs de Lagrange en n réels forment une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Justifier que la famille $(x \longmapsto |x-a|)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.

Soit $\omega \in \mathbf{C}$. Montrer que $\{x\omega : x \in \mathbf{R}\}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. À quelle condition est-ce également un $\mathbf{C}$-espace vectoriel ?

Soit $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$. On définit le produit vectoriel $u \wedge v$. Montrer que celui-ci est orthogonal à u et v, et donc normal à P. En déduire une expression de l'équation de v. (On pourra d'abord appliquer cette méthode à deux vecteurs u et v quelconques.)

Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ croissante. Se convaincre à l'aide d'un dessin qu'elle admet un point fixe. Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ par rapport à x si x est inférieur au plus petit point fixe de f ? Introduire en conséquence $\sup\{x \in [0,1] : x \geqslant f(x)\}$ pour conclure.

Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés sur l'équateur de même température. *On commencera par essayer de poser un peu mieux le problème mathématique....*

Soit $f : I \longmapsto I$ une fonction k-contractante pour $k < 1$. Montrer que f admet au plus un point fixe et que si celui existe et s'appelle c, alors toute suite de la forme $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers c.

Soit $f : [a,b] \longmapsto I$ une fonction faiblement contractante. Montrer que celle-ci admet au plus un point fixe. Justifier son existence en introduisant la fonction $x \longmapsto |f(x)-x|$ et montrer que toute suite de la forme $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers celui-ci.

Déterminer le fonctions continues f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour tous a et $b \in \mathbf{R}$.

Déterminer les fonctions croissantes f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(a+b) = f(a)+f(b)$ pour tous a et $b \in \mathbf{R}$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{C}$ est dérivable si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ sont dérivables. Montrer que si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $|f|$ est dérivable en x_0. Montrer qu'il en est de même si $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) = 0$.

Soit $f : [0, a] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que $f'(0) = f(0) = f(a) = 0$. Montrer qu'il existe au moins deux points en lesquels la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Soit $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ dérivable telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} \in \mathbf{R}$. Montrer que f' s'annule en un point au moins.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que si f s'annule en n points distincts, alors sa dérivée $(n-1)$-ième s'annule au moins une fois.

Égalité de Taylor-Lagrange. Soit $f : \mathcal{C}^n([a,b], \mathbf{R})$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On pourra à cet effet introduire $g : t \longmapsto f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(b-x)^i + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ avec $A \in \mathbf{R}$ à choisir.

Méthode des trapèzes. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbf{R})$, trois fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = \frac{f'(b)+f'(a)}{2} - \frac{f'(c)}{12}(b-a)^3$.

En choisissant g $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ deux fois dérivable sur $]a, b[$, et f une primitive de g, en déduire une méthode de calcul efficace de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Congurences et binôme. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k} \; ; T = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+1} ; U = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

On pourra par exemple étudier les quantités $S+T+U$, $S+jT+j^2U$ et $S+j^2T+jU$.
Plus généralement, que vaut la somme suivante ?

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \equiv r[q]}} \binom{n}{k}$$

Formule de Chu-Vandermonde. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}^2$, d'une part en utilisant le développement $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n$; d'autre part par un raisonnement purement combinatoire.

Plus généralement, calculer $\sum_{k=0}^{r} \binom{k}{n}\binom{r-k}{m}$ pour $r \leqslant \min(n, m)$.

Niveau d'un test. Le gouvernement estime qu'environ un français sur dix-mille pourrait être lié à un réseau terroriste. Il fait voter une loi tendant à autoriser une vérification automatisée des communications de chaque français pour déterminer s'il existe des raisons de penser qu'il pourrait être lié à un tel réseau. Un prestataire propose un algorithme qui a 99 % de chances de signaler une personne effectivement liée à de tels réseaux, et seulement 0,1 % de chances de signaler un citoyen « n'ayant rien à cacher ». Que peut-on en penser ?

A priori. Une personne, que l'on croît avoir une probabilité p d'être un tricheur, parie qu'il obtiendra pile s'il lance une pièce non truquée, la lance, et obtient effectivement pile. Que peut-on alors dire de la probabilité qu'il soit un tricheur ?

Dé truqué. Déterminer les racines complexes du polynôme $X^2 + \cdots + X^{12}$.

On se donne un dé truqué de telle sorte que la somme de deux lancers indépendants suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. Soient X et Y deux tels lancers. En s'intéressant aux fonctions $t \longmapsto \mathbf{E}[t^X]$, $t \longmapsto \mathbf{E}[t^Y]$ et $t \longmapsto \mathbf{E}[t^{X+Y}]$ conclure à une absurdité.

Écart à l'indépendance. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que $|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

On pourra pour cela introduire les quantités $\mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}(\bar{A} \cap B)$, $\mathbf{P}(A \cap \bar{B})$, $\mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Indépendance à tout. Soit A un événement d'un espace probabilisé indépendant de tout autre événement. Quelle est sa probabilité ?

Lemme de Borel-Cantelli. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne se réalise est majorée par :

$$\exp(-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k))$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'événements. On suppose que $\sum_{n=0}^{N} \mathbf{P}(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k \geqslant N} A_k\right) = 1$.

Lemme d'Hadamard. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $K_A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\}$ est un espace vectoriel. Montrer que si A est inversible, alors il n'existe pas de $K_A = \{0\}$. *On admet que la réciproque est vraie.*

Notons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $R_i := \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Supposons que pour tout i, $R_i > |a_{i,i}|$ et A inversible. Il existe donc $X \in K_A$ tel que $X \neq 0$. Aboutir à une contradiction.

Colonnes liées. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $I_A = \{AX : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$ est un espace vectoriel. Montrer que si A est inversible, alors $I_A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. *On admet que la réciproque est vraie.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre réels. On suppose que $A = (\cos(\alpha_i + \alpha_j))_{i,j \in [\![1,4]\!]}$. En étudiant I_A, montrer que A n'est pas inversible.

Suite de Fibonacci. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L'on pose $U_n = (u_n, u_{n+1})^{\perp}$.

Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = AU_n$.

L'on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}AP$, puis en déduire la valeur de $P^{-1}A^nP$. Conclure quant à la valeur de u_n. Que peut-on en déduire de la valeur limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?

Petites questions.

— Calculer la limite en 0 de $\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

— Donner un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{1-\frac{1}{1-1/n}}$.

— Calculer la limite de $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$.

.

Égalité de Taylor-Lagrange. Soit $f : \mathcal{C}^n([a,b],\mathbf{R})$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On pourra à cet effet introduire $g : t \longmapsto f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(b-x)^i + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ avec $A \in \mathbf{R}$ à choisir.

DL égaux à tout ordre. Soit $f : \mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ nulle en-dehors de $]-1,1[$, et définie par $f(x) = \left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ sur $]-1,1[$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, puis donner son développement limité à l'ordre n en 0. Conclusion ?

Formules de Stirling. Soit $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $-\frac{1}{n^2} \leqslant \log u_{n+1}u_n \leqslant 0$. Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_n$ est bornée, et en déduire l'existence d'un $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $n! \equiv \alpha\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

En utilisant astucieusement les intégrales de Wallis, l'on peut démontrer que $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

Question. Que peut-on dire d'une suite équivalente à la suite nulle ?

Critère d'Abel Soient $\sum v_n$ une série dont la suite des sommes partielles est bornée, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle telle que $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que $\sum u_n v_n$ est convergente.

L'on pourra pour cela démontrer que, si (V_n) est la suite des sommes partielles de $\sum v_n$, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)V_k$. Pourquoi cette transformation peut-elle être qualifiée de « sommation par paquets » ?

Théorème de Mertens Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente, $\sum v_n$ une série convergente. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. (V_n) et (W_n) désignent es sommes partielles de $\sum v_n$ et $\sum w_n$ respectivement.

L'on suppose dans un premier temps que $\sum v_n$ est de somme nulle. En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbf{N}, W_n = \sum_{k=0}^{n} u_k V_{n-k}$, justifier que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 0$.

L'on revient maintenant dans le cas général : justifier que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

En déduire, pour $k \in \mathbf{N}^*$, l'existence d'une suite H_n telle que $\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} H_n z^n = (1-z)^{-k}$.

Comparaison série-intégrale Soit $f\ : [a,\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^+$ continue par moreaux et décroissante. Justifier que pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $k \geqslant a$, $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$. En déduire que $\sum_{n\geqslant a} f(n)$ converge si, et seulement si $\int_a^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer le théorème de convergence des séries de Riemann, ainsi que celui concernant les intégrales de Bertrand dans le cas où $\alpha = 1$.

Règle de Raabe-Duhamel Soit $\sum u_n$ une série telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge ; si $\alpha < 1$ alors elle diverge ; et qu'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.

Produits infinis Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. L'on dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite de ses produits partiels possède une limite, qu'il converge strictement si cette limite est de plus non nulle.

On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < |u_n| < 1$. Montrer que le produit $\prod(1+u_n)$ converge strictement si, et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument. L'on pourra pour cela exploiter une inégalité bien connue sur le logarithme…

Critère de Cauchy. Par convention, l'on dira dans cet exercice qu'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non vide et non majoré a une borne supérieure égale à $+\infty$. La définition de la convergence d'une suite vers $+\infty$ reste valable dans le cas des suites à valeur dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. L'on notera également par abus $\frac{1}{\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = \infty$.

Soit (u_n) une suite de réels. Démontrer l'existence de $\lim_{n\to\infty} \sup\{u_k : k \geqslant n\}$. L'on note cette quantité $\limsup_{n\to\infty} u_n$.

Soit $\sum u_n$. On pose $p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Montrer que si $p < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument ; que si $p > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement, et qu'on ne peut pas conclure si $p = 1$.

On considère la série $S(z) = \sum u_n z^n$. Montrer que si $|z| < |z'|$ et $S(z')$ converge, alors $S(z)$ converge absolument. En déduire l'existence de $\rho(u) > 0$ tel que si $|z| < \rho(u)$, alors $S(z)$ converge absolument et si $z > \rho(u)$, alors $S(z)$ diverge grossièrement. Quel est le lien entre $\rho(u)$ et p ?

Introduction à la dualité. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in E$, $e_i^*(x)$ la i^{e} coordonnée de x dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les e_i^* sont des applications linéaires de E dans $\mathbf{R}$.

On choisit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et l'on se donne $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n$ et l'on note L_0 à L_n les polynômes interpolateurs de Lagrange associés (demander la définition si nécessaire), qui forment une base de E. Comment exprimer les L_i^* ?

L'on revient maintenant au cas général. Démontrer que $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$. On appelle cette base la base duale de $\mathcal{B}$.

L'on se donne maintenant une base $\mathcal{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Démontrer qu'une éventuelle base E dont $\mathcal{C}$ serait duale est unique. *En fait, une telle base existe.*

Polynôme minimal. L'on se donne un espace vectoriel E et un endomorphisme f tel que $f^3 - 3f + 2\mathrm{id} = 0$, qui n'est pas une homothétie. Justifier que f est un automorphisme et donner son inverse. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$, uniques, telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^n = a_n \mathrm{id} + b_n f$. Justifier que $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, et en déduire son terme général.

Démontrer que les sous-espaces $\ker f - \mathrm{id}$ et $\ker f - 2\mathrm{id}$ sont supplémentaires dans E.

Commutateur. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}_n[X]$ définis par $f(P) = PX$ et $g(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $gf - fg$, puis démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $gf^n - f^n g = nf^{n-1}$.

Homothétie. Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme tel que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ soit liée. Justifier que f est une homothétie.

Supplémentaire du noyau. Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Démontrer que S est isomorphe à $\mathrm{im}(E)$.

Combinaison linéaire de formes linéaires. Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $\psi_1, \ldots, \psi_n$ des éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$. Démontrer que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K}), \varphi \in \mathrm{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \iff \bigcap_{i=1}^{n} \ker \psi_i \subseteq \ker \varphi$$

Pour le sens « difficile », on pourra se ramener au cas où la famille $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est libre, et utiliser l'application $F : x \in E \longmapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \varphi(x)) \in \mathbf{K}^n$: est-elle surjective ? Si non, que peut-on dire des éléments de son image ?

Nilpotence locale. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel finiment engendré et f un endomorphisme de E. L'on suppose que $\forall x \in E, \exists n \in \mathbf{N}, f^n(x) = 0_E$. Pourquoi est-ce apparemment différent de dire que f est nilpotente ? Montrer qu'il y a malgré tout équivalence entre les deux assertions.

Endomorphismes et multiplication matricielle. On identifie $\mathbf{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que l'application $\varphi : X \in \mathbf{R}^n \longmapsto MX \in \mathbf{R}^n$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

Justifier que si M est inversible, alors φ est un automorphisme. Démontrer que si φ est surjective, alors M est inversible. *Il suffit également que φ soit injective pour que M soit inversible.*

Variable aléatoire indépendante d'une fonction d'elle-même. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les variables X et $f(X)$ soient indépendantes.

Loi de Poisson et processus de Bernoulli. Un chef de service reçoit X dossiers à traiter, X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Il délègue chacun des dossiers à un subordonné avec une probabilité $p \in]0,1[$; les choix consistants à déléguer les dossiers et X étant mutuellement indépendants. Déterminer la loi de probabilité du nombre Y de dossiers traités par le subordonnés.

En déduire la loi de probabilité de la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.

Inégalités et loi faible des grands nombres. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire positive d'espérance finie. L'on note $\mathbf{1}_{\{X>1\}}$ une variable aléatoire telle que pour $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{\{X\geqslant 1\}}(\omega) = 1$ si $X(\omega) \geqslant 1$ et $\mathbf{1}_{\{X\geqslant 1\}}(\omega) = 0$ si $X(\omega) < 1$.

Interpréter ce que représente la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{X>1\}}$. Calculer son espérance, puis en comparant les variables aléatoires X et $\mathbf{1}_{\{X>1\}}$, justifier que $\mathbf{P}(X \geqslant 1) \leqslant \mathbf{E}[X]$. Justifier ensuite plus généralement que pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}[X]}{a}$ (*inégalité de Markov*).

L'on revient au cas général : soit Y une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre deux. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|Y - \mathbf{E}[Y]| \leqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{Var}(Y)}{\varepsilon^2}$ (*inégalité de Bienaymé–Tchebychev*).

L'on se donne ensuite une suite $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, admettant un moment d'ordre deux. L'on pose $S_n := \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Majorer $\mathbf{P}\left(|S_n - \mathbf{E}[X_1]| > \varepsilon\right)$ en fonction de $\mathbf{Var}(X)$, ε et n. Interpréter.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire. L'on note $\mathcal{H}(X)$ l'*entropie de* X, définie comme $-\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) \log \mathbf{P}(X = x)$, avec la convention $0 \log 0 = 0$. Donner une convention nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{H}(X)$ soit nulle.

Si $Y : \Omega \longrightarrow F$ est une autre variable aléatoire sur le même espace, l'on note $\mathcal{H}(X,Y)$ l'entropie de la variable $(X,Y) : \Omega \longrightarrow E \times F$. Justifier que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathcal{H}(X,Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

On appelle *entropie de X sachant Y* le nombre : $\mathcal{H}(X|Y) = \mathcal{H}(X,Y) - \mathcal{H}(Y)$. Justifier que $\mathcal{H}(X|Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y)\mathcal{H}(X|Y = y)$, avec $\mathcal{H}(X|Y = y) = -\sum x \in X(\Omega)\mathbf{P}(X = x|Y = y) \log \mathbf{P}(X = x|Y = y)$.

Pour $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longmapsto \mathbf{N}$ une variable aléatoire, l'on définit sa série génératrice comme $G_X : t \longmapsto \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(X = n)t^n$. Justifier que G_X est bien définie sur $]-1,1]$.

L'on admet que G_X est dérivable à gauche en 1 si, et seulement si X est d'espérance finie ; en ce cas on admet que sa dérivée à gauche en 1 est la somme des dérivées des termes évaluées en 1. Justifier qu'en ce cas, $G'_X(1) = \mathbf{E}(X)$.

L'on se donne N une variable aléatoire $\Omega \longrightarrow \mathbf{N}$ et $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de N et de même loi. L'on pose $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$. Justifier que $G_S = G_N \circ G_{X_1}$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que S soit d'espérance finie et en ce cas, calculer son espérance.

Loi bêta. Soit X une variable aléatoire réelle à densité dont la densité possède un support borné. Démontrer que X admet une espérance et des moments à tout ordre.

Soit $f_{\alpha,\beta}$ la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$$

Déterminer pour quel ensemble de valeurs de α et β, f est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Pour une telle valeur, l'on dit que la variable aléatoire X suit la loi $B(\alpha,\beta)$ (loi bêta de paramètres α et β) si, et seulement si elle admet sur $\mathbf{R}$ la densité $f\{\alpha,\beta\}$.

Calculer l'espérance et la variance d'une telle loi.

Loi de Laplace. L'on dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Laplace de paramètres μ et b si elle possède sur $\mathbf{R}$ la densité suivante :

$$x \mapsto c \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$$

Où c est une constante que l'on déterminera.

Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant cette loi.

Loi [trouver son nom]. Soit $F : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ définie sur $\mathbf{R}$. Vérifier que F est une fonction de répartition de variable aléatoire réelle, et déterminer la densité associée. Justifier qu'elle possède un moment à tout ordre.

Maximisation de vraisemblance. L'on considère le processus suivant : un objet est placé dans un état X valant 0 avec une probabilité p, ou 1 avec une probabilité $1-p$. Il est ensuite placé à une position $Y \in \mathbf{R}$ aléatoire, de loi $\mathcal{N}(\alpha,\sigma^2)$ (ayant pour fonction de densité f_0) si $X=0$ et $\mathcal{N}(\beta,\rho^2)$ (ayant pour fonction de densité f_1) sinon. Ce processus peut être répété autant de fois que souhaité dans les mêmes conditions de façon indépendante, et l'observateur note les états $X_1,\dots,X_n,\dots$ et les positions $Y_1,\dots,Y_n,\dots$. Son objectif est de déterminer les valeurs (inconnues) de p, α, σ, β et ρ.

Pour *une* observation de (X,Y), l'on définit la *vraisemblance* (*likelyhood*) du quintuplet $(p,\alpha,\sigma,\beta,\rho)$ par :

$$L_{(X,Y)}(p,\alpha,\sigma,\beta,\rho) = g(X,p) \times f_X(Y)$$

où $g(X,p)$ vaut p si $X=0$ et $1-p$ sinon.

Essayer de comprendre ce que représente cette vraisemblance.

Pour n observations (X_1,Y_1) à (X_n,Y_n), la vraisemblance est définie par :

$$L_{(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)}(p,\alpha,\sigma,\beta,\rho) = \prod_{i=1}^{n} L_{(X_i,Y_i)}(p,\alpha,\sigma,\beta,\rho)$$

C'est une fonction aléatoire (qui dépend de $2n$ variables aléatoires) des cinq variables que l'on recherche !

Déterminer le quintuplet $(\hat{p},\hat{\alpha},\hat{\sigma},\hat{\beta},\hat{\rho})$ qui maximise la fonction $L_{(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)}$. L'on pourra admettra qu'il suffit pour cela d'annuler simultanément les dérivées de cette fonction selon ses cinq variables.

Quel type d'objet les nombres $\hat{p},\hat{\alpha},\hat{\sigma},\hat{\beta},\hat{\rho}$ sont-ils ? Aléatoires ou déterministes ?