Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Calculer la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+2} = x_n + x_{n+1} - n$.

Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que u_n admet une limite.

Soient n réels : $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. Montrer que deux d'entre eux sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

Soit $f = p + i = p' + i'$ où p est paire et i impaire. Montrer que $(p, i) = (p', i')$.

En déduire que toute fonction réelle s'écrit d'une unique façon comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir : $A \cap B = A \cup B$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$. Exprimer mathématiquement les propositions suivantes, et donner leur négation :

- f prend deux fois la même valeur
- f est croissante sur I
- f est strictement monotone sur I
- f admet un maximum global sur I
- f admet un extremum local sur I

On pose pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$:

$$A_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, $A_{m,n} = 4A_{m,n-1} - A_{m+1,n-1}$.

En déduire que les $(A_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ sont entiers naturels.

Existe-t-il deux fonctions f et g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f \circ g : x \longmapsto x^2$ et $g \circ f : x \longmapsto x^3$?

Montrer que toute récurrence à plusieurs étapes se ramène en fait à une récurrence simple par un changement d'hypothèse.

Soit E un ensemble. Construire une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Prouver qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ (théorème de Cantor).

Indication : pour une fonction $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, considérer $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$

Soit $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ croissante. On pose $E = \{E \in \mathcal{P}(A) \mid X \in f(x)\}$ et $X_0 = \bigcap_{X\in E} X$. Montrer que $X_0 \subset f(X_0)$; en déduire que $X_0 = f(X_0)$ (théorème de Knaster-Tarski).

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections. Montrer qu'il existe une bijection de E sur F (théorème de Cantor-Bernstein). Indication : considérer

$$h : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & E \backslash g\left(F \backslash f(X)\right) \end{array}$$

Résoudre $\tan(2x) = 3\tan(x)$.

Résoudre $\tan(x)\tan(5x) = 1$ dans $\mathbf{R}$.

Linéariser : $\cos^2(x)\sin^5(x)$.

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$. (remarquer que $k = (k+1) - 1$.

Calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$ de deux façons différentes pour prouver que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n}\right)^2$.

Calculer $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbf{N}*$:

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \cdots < \binom{2n}{n}$$

En déduire que $\forall n \leqslant 1, \binom{n}{2n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

On considère le réseau torique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Calculer la distance moyenne entre deux points.

Montrer que $1 + \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\theta}$. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$.

Calculer $\prod_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Limite pour $N \to +\infty$?
(Indication : calculer $\frac{\sin(2t)}{\sin(t)}$)
En déduire que $\forall a \in \mathbf{R}$, $|\sin(a)| \leqslant |a|$.
Calculer le produit infini suivant :

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

On considère treize réels $x_1, \ldots, x_n$. Prouver qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{2}$$

et le quotient est bien défini.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Trouver une équation vérifiée par a et b, en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Soient A, B et C trois points distincts d'affixe respective a, b et c vérifiant $|a| = |b| = |c|$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + b + c = 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$. Plus généralement, comment calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-r}{p} \rfloor} \binom{n}{pk+r}$ pour tout triplet d'entiers ?

Linéariser $\sin^2(x)\cos(3x)$ et $\cos^3(x)\cos(2x)$.

On donne (ou on fait calculer par des différences) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ par une résolution d'équation du second degré bien choisie.

Montrer que si deux entiers sont sommes de deux carrés, alors leur produit l'est aussi.

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - (2\cos(\theta))z + 1 = 0$.

Résoudre alors (et exprimer sous forme algébrique simple) l'équation

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos\theta$$

(solutions : les $i\cot\left(\frac{k\pi}{n} \pm \frac{\alpha}{2n}\right)$)

Donner une équation dont les racines sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

En déduire que trois complexes a, b et c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

(penser à $\frac{b-a}{c-a} \in \left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$)

On considère la relation binaire sur $\mathbf{N}$: $a \leqslant b \Leftrightarrow a|b$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre ; quel est le plus petit élément ? Le plus grand élément ?

On considère la relation binaire sur les couples de points du plan : $(A, B) \bowtie (C, D) \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur les bipoints. Que représentent les classes d'équivalence ?

Principe d'induction. Soit P un ensemble muni de la relation $\lhd$. On suppose $\lhd$ bien fondée, c'est-à-dire $\forall A \subset P$, $A \neq \emptyset$, $\exists a\ inA$, $\forall b \in A$, $b \ntriangleleft a$.

Pour $p \in P$, on note $\operatorname{Prec}(p) = \{q \in P : q \lhd p\}$. Supposons B inductif, c'est-à-dire $\forall p \in P$, $\operatorname{Prec}(p) \subseteq B \Rightarrow p \in B$. Montrer que $B = P$. Interprétation ?

On considère un ensemble X et une famille de fonctions $\forall p \in P$, $F_p : X^{\operatorname{Prec}(p)} \longrightarrow X$. Montrer que s'il existe une fonction $f : P \longrightarrow X$ telle que $\forall p \in P, f(p) = F_p(f_{|\operatorname{Prec}(p)})$, alors elle est unique. Interprétation ?

Soit f croissante telle que $f \circ f = \operatorname{Id}_{\mathbf{R}}$. Montrer que $f = \operatorname{Id}_{\mathbf{R}}$.

Déterminer l'ensemble des fonctions croissantes périodiques.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en 0 telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Considérons le système $AX = 0$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Supposons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|a_{k,k}| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{i,k}|$. Montrer que $X = 0$.

Supposons que le système $AX = B$ admet une unique solution. Montrer que $AX = 0$ admet aussi une unique solution (laquelle ?). Des idées pour démontrer le sens retour ?

Soient A_1, …, A_n n points du plan. Existe-t-il M_1, …, M_n dans le plan tel que A_i est le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$?

On rappelle ce qu'est un ordre bien fondé. Montrer qu'un ordre est bien fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite strictement décroissante pour cet ordre.

Soit $f : x \longmapsto 2\arctan(\tanh x) - \arctan(\sinh(2x))$. Montrer que f est la fonction nulle.

On rappelle (on admet ?) que pour une fonction bijective dérivable f dont la dérivée ne s'annule pas, on a : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Déterminer la dérivée de argsh. En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

Calculer $(n+1)W_nW_{n+1}$.

Calculer W_{2n} et W_{2n+1} à l'aide de factorielles.

Montrer que $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $I_{n,p} = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x-1)^n(x+1)^p\mathrm{d}x$.

Établir que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n,p} = \frac{-n}{p+1} I_{n-1,p+1}$.

Calculer $I_{n,p}$ et donner la valeur de $I_{p,p}$.

Déterminer les primitives sur $\mathbf{R}$ de $t \longmapsto \frac{1}{t-i}$, puis celles de $t \longmapsto \frac{1}{t-a}$, $a \in \mathbf{C}$.

Calculer $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ln(x)\mathrm{d}x$ pour $a \in]0,1[$.

On définit les intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Calculer $(n+1)W_nW_{n+1}$. Montrer que $\frac{W_n}{W_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En déduire que $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$

Par un changement de variable, intégrer le membre de gauche sur $[0, \sqrt(n)]$ et majorer l'intégrale du membre de droite sur le même intervalle. En déduire que

$$\int_{-A}^{A} e^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

Calculer $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\ln(x)\mathrm{d}x$ pour $a \in]0,1[$.

Trouver les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivables en 0 telles que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

On admet le théorème de relèvement : si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une fonction $\omega : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = \exp\circ(i\omega)$.

Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^x\alpha'(x) & = & -x\beta(x) \\ e^x\beta'(x) & = & x\alpha(x) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha(0) & = & 1 \\ \beta(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans tout cet exercice, n'aura pas recours au corps des réels.

Énoncer la propriété de la borne supérieure.

Montrer que l'ensemble $\{q \in \mathbf{Q} : q^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbf{Q}$ (indication : penser à la méthode de Héron).

On appelle *coupure de Dedekind* un ensemble $C \in \mathbf{Q}$ tel que : (i) $C \neq \varnothing$, $C \neq \mathbf{Q}$; (ii) $\forall x \in C, \exists y \in C, y > x$; (iii) $\forall x \in C, \forall y \in \mathbf{Q}, y < x \Rightarrow y \in C$.

Montrer que les $C_q = \{y \in \mathbf{Q} : y < q\}$ sont des coupure de Dedekind pour $q \in \mathbf{Q}$, et que $\{C_q : q \in \mathbf{Q}\}$ est en bijection avec $\mathbf{Q}$. Montrer que $R = \{y \in \mathbf{Q} : y^2 < 2 \vee y < 0\}$ est une coupure de Dedekind.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des coupures de Dedekind. On le munit de la relation d'ordre $\subset$. Montrer qu'il s'agit d'un ordre total sans extrémités, vérifiant la propriété de la borne supérieure. Montrer que $\{C_q : q \in \mathbf{Q}\}$ est dense dans $\mathcal{R}$.

Soit f croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f s'injecte dans $\mathbf{R}$.

Une puce est placée sur le point 0 du cercle unité. Elle fait successivement des sauts d'un radian toujours dans la même direction. Montrer qu'elle ne repassera jamais par son point de départ, mais repassera toujours arbitrairement près.

Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ 0 \leqslant 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < x$.

Rappeler la définition de la convergence d'une suite. Montrer qu'une suite d'une partie fermée de $\mathbf{R}$ convergence a sa limite dans le fermé. En déduire que $\mathbf{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \left(n - \frac{1}{6} \left(2 \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 5\right) \left\lfloor \sqrt{n} - 1 \right\rfloor \right)$.

Une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dit convexe si $\forall (a, b) \in \mathbf{R}$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - b)t) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b)$. Montrer que cette propriété est équivalente à : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$ si f est continue.

Une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dit convexe si $\forall (a, b) \in \mathbf{R}$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - b)t) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(b)$. Montrer que si f est continue, cette propriété est équivalente à : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Soit $p_n \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$ et $q_n \in (\mathbf{N}*)^{\mathbf{N}}$. Supposons $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$; montrer que $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Soit F une partie fermée de $\mathbf{R}$; montrer que toute suite de $F^{\mathbf{N}}$ convergente dans $\mathbf{R}$ converge dans F.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ avec $X \subset \mathbf{C}$ est dite *de Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{N}, \forall p, q \leqslant m, |u_p - u_q| < \varepsilon$. On dit que X est une partie *complète* si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

Montrer que toute convergente est de Cauchy. Prouver que $\mathbf{Q}$ n'est pas complet, puis que $\mathbf{R}$ l'est. Montrer que $\mathbf{R}$ est le plus petit espace complet contenant $\mathbf{Q}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $u_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Montrer que de toute suite de réels on peut extraire une suite monotone. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstraß.

On dit qu'une partie X de $\mathbf{C}$ est *séquentiellement compacte* si toute suite à valeurs dans X possède une suite extraite convergente. On dit qu'elle vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si (si X est recouvert par une famille d'ouverts, alors il est recouvert par un nombre fini d'entre eux).

Montrer que la propriété de Borel-Lebesgue implique la compacité séquentielle. En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstraß dans $\mathbf{R}$.

On suppose maintenant que X vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i(x) \in I, \mathcal{B}(x, r) \subset U_{i(x)}$. En déduire que la compacité séquentielle implique la propriété de Borel-Lebesgue.

Calculer $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_{n+2}+2\cos(\theta)u_{n+1}+u_n=0$, $u_0=1$, $u_1=\cos^2\theta-1$.

Une fonction $f:I\longrightarrow\mathbf{R}$ est dite *uniformément continue sur I* si $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(x,y)\in I^2,|x-y|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Soit $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ uniformément continue telle que $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(nx)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Montrer que $f\xrightarrow[\infty]{}0$.

Montrer que ce n'est plus vrai si l'on ne suppose pas f continue.

On admet le *lemme de Baire* : toute réunion dénombrable de fermés de $\mathbf{R}$ d'intérieur vide est d'intérieur vide. Montrer que ce résultat reste vrai si f est seulement supposée continue.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall(n,m)\in\mathbf{N}^2$, $u_{n+m}\leqslant u_n+u_m$. Montrer le *lemme de Fekete* $\frac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\inf\left\{\frac{u_n}{n}:n\in\mathbf{N}\right\}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que les quantités $\limsup\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geqslant n}u_k\right)$ et $\liminf\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{k\geqslant n}u_k\right)$ sont bien définies dans $\overline{\mathbf{R}}$, et qu'il s'agit respectivement de la plus grande et de la plus petite valeur d'adhérence de u. En déduire que u converge ssi $\limsup u=\liminf u\in\mathbf{R}$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in X^{\mathbf{N}}$ avec $X\subset\mathbf{C}$ est dite *de Cauchy* si $\forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbf{N},\forall p,q\leqslant m,|u_p-u_q|<\varepsilon$. On dit que X est une partie *complète* si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que $\mathbf{R}$ est complet, puis qu'il est (à isométrie près) le seul espace complet dans lequel $\mathbf{Q}$ est dense.

Trouver une suite dont tout réel est valeur d'adhérence.

Trouver une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais f ne tende pas vers 0 en l'infini.

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *uniformément continue sur* I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Montrer que si f est uniformément continue et $\forall x \in \mathbf{R},\ f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $f \xrightarrow[\infty]{} 0$.

On admet le *lemme de Baire* : toute réunion dénombrable de fermés de $\mathbf{R}$ d'intérieur vide est d'intérieur vide. Montrer que ce résultat reste vrai si f est seulement supposée continue. Indication : démontrer que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Montrer que $\mathbf{1_Q}$ est discontinue en tout point de $\mathbf{R}$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ l'application définie par $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 0$ si x est irrationnel, et $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \wedge q = 1$. Montrer que φ est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

Montrer que si f est continue, alors elle admet un point fixe.

Montrer que si f est croissante, alors elle admet un point fixe (théorème de Knaster-Tarski).

Déterminer les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continues telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(1) = 1$.

Déterminer les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(1) = 1$ et $\forall x \in \mathbf{R}^x,\ f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}$. Indication : calculer $f\left((x(1-x))^{-1}\right)$.

$f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite *convexe* si $\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Montrer que f continue est convexe si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Soit $f(x) = n_k x^k + \cdots + n_1 x + n_0$ une fonction polynomiale à coefficients entiers positifs. Comment déterminer en connaissant *deux* valeurs seulement prises par la fonction f tous les coefficients ?

Soient a, b des entiers naturels supérieurs à 2 et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $a^n + b^n$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Notons $\mathbf{Z}_{(2)}$ l'ensemble des rationnels à dénominateur impair. Soient $(x, y, z) \in \mathbf{Q}$ tels que $x^2+y^2+z^2 = 1$; montrer que $(x, y, z) \in \mathbf{Z}_{(2)}^3$.

Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[3]{7n+2} = \sqrt[3]{7n+3}$.

Soit n entier naturel supérieur à 2. Montrer que n est premier ssi $(n-1)! \equiv -1[n]$ (*théorème de Wilson*).

Montrer que $\mathbf{1_Q}$ est discontinue en tout point de $\mathbf{R}$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$ l'application définie par $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 0$ si x est irrationnel, et $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ si $p \wedge q = 1$. Montrer que φ est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$.

Montrer que si f est continue, alors elle admet un point fixe.

Montrer que si f est croissante, alors elle admet un point fixe (théorème de Knaster-Tarski).

Soient a, b des entiers naturels supérieurs à 2 et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $a^n + b^n$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Soit $f : [0, a]$ dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe deux points au moins en lesquels la tangente à f passe par l'origine.

Soit $f : [0, a]$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Étudier la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$

Soit $f : [0, \infty] \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f'(x) + f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ dérivable. Montrer que pour tout x tel que $f(x) \neq 0$, $|f|$ est dérivable en x.
Montrer que si x est tel que $f(x) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en x ssi $f'(x) = 0$.

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur $\mathbf{R}$. Supposons $f'(0) = 1$, que peut-on dire de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$. f et g sont-elles égales ?

Soit $f : [a, \infty[$ continue, dérivable sur $]a, \infty[$ et telle que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$. Existe-t-il $c > a$ tel que $f'(x) = 0$?

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a)$ et $f'(b)$ soient de signe différent. Existe-t-il $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$?

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. Montrer que f' est bornée, que $\sup |f'| \leqslant 2\sqrt{\sup |f| \sup |f''|}$, puis que l'inégalité est optimale (càd que le coefficient 2 ne peut pas être amélioré).

Indication : considérer les fonctions $f_a(x) = \mathbf{1}_{[0,1](x)}(1 - x)^a - \frac{1}{2}$.

Méthode de Newton : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ et $f'' \geqslant 0$. On cherche à approximer l'unique zéro de f, noté c.

Soit u_0 tel que $f(u_0) > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_{n+1} := u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et converge vers c en décroissant. Que représente géométriquement u_{n+1} ? Prouver qu'il existe un intervalle dans lequel choisir u_0 et une constante $k > 0$ qui assurant que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - c| \leqslant \frac{k}{2^{2n}}$.

Soit c_n le nombre d'arbres binaires à n nœuds. Trouver une formule de récurrence liant c_{n+1} aux $(c_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$. On admet (se démontrerait par des arguments d'informatique théorique) que $\forall n \in \mathbf{N}, c_n \leqslant 4^n$.

Soit $C(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Démontrer que $C(x)$ est bien définie pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$. *On admet que C est continue sur ce domaine.* Calculer le développement limité de C à l'ordre n en 0.

En calculant les développements limités en 0 de $C(x)^2$, déterminer une équation du second degré vérifiée par $C(x)$ et en déduire une expression algébrique de C.

En déduire c_n, puis un équivalent de c_n en $+\infty$.

Soit $u_n := \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a l'encadrement $-\frac{1}{n^2} \leqslant \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 0$. Prouver que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $\alpha > 0$.

En considérant les intégrales de Wallis $W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$, déterminer la valeur de α et en déduire la formule de Stirling.

Calculer la limite de $\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ en 0.

Méthode de Newton : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ et $f'' \geqslant 0$. On cherche à approximer l'unique zéro de f, noté c.

Soit u_0 tel que $f(u_0) > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $u_{n+1} := u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et converge vers c en décroissant. Que représente géométriquement u_{n+1} ? Prouver qu'il existe un intervalle dans lequel choisir u_0 et une constante $k > 0$ qui assurant que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - c| \leqslant \frac{k}{2^{2^n}}$.

Inversion de Möbius. Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{Z}$. On définit $f * g(n) = \sum_{k\in\mathbf{N}*,k|n} f(k)g(n/k)$. Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif, préciser ses inversibles. En notant φ l'indicatrice d'Euler, que vaut $\varphi * 1$?

On définit la fonction de Möbius par $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré, et $\mu(n) = (-1)^k$ où k est le nombre de premiers dans la décomposition de μ en facteurs premiers sinon. Montrer que $\mu = 1^{*-1}$.

On note pour $n \in \mathbf{N}^*$ Φ_n le n^e polynôme cyclotomique, c'est-à-dire dont les racines sont les racines de l'unité qui ne sont racines d'aucun Φ_k, $k \leqslant n$. Calculer Φ_1 à Φ_7, et exprimer $X^n - 1$ en fonction des Φ_k.

Pour $(G, \star)$ un groupe abélien, $f \in G^{\mathbf{N}*}$ et $u \in A$, on note $u.f(n) = \bigstar_{d\in\mathbf{N}*,d|n} f(d)^{\star g(n/d)}$. En s'aidant de la structure ainsi définie sur $\left(G^{\mathbf{N}*}, \star, .\right)$, montrer que $\Phi_n = \prod_{d|n}(X^d - 1)^{\mu(n/d)}$.

Nombres de Catalàn. Soit c_n définie par $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n_k}$. On admet (se démontrerait par des arguments d'informatique théorique) que $\forall n \in \mathbf{N}, c_n \leqslant 4^n$.

Soit $C(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n c_k x^k$. Démontrer que $C(x)$ est bien définie pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$. *On admet que C est continue sur ce domaine.* Calculer le développement limité de C à l'ordre n en 0.

En calculant les développements limités en 0 de $C(x)^2$, déterminer une équation du second degré vérifiée par $C(x)$ et en déduire une expression algébrique de C.

En déduire c_n, puis un équivalent de c_n en $+\infty$.

Formule de Stirling. Soit $u_n := \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a l'encadrement $-\frac{1}{n^2} \leqslant \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 0$. Prouver que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $\alpha > 0$.

En considérant les intégrales de Wallis $W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$, déterminer la valeur de α et en déduire la formule de Stirling.

Généralisation du petit théorème de Fermat. Soit $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$ l'ensemble des entiers modulo n muni de sa structure canonique d'anneau. Quels sont les inversibles ? Combien y en a-t-il ?

Soit $a \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. En considérant $\prod_{x\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times}(a \times x)$, montrer que $a^{\phi(n)} = 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall a \in \mathbf{Z}$ premier avec n, $a^{\phi(n)} \equiv 1[\mod n]$.

Groupe diédral. Soit $n \geqslant 3$. Justifier que l'ensemble des isométries du n-gone régulier forment un groupe, noté D_n. Les décrire explicitement. Montrer qu'il existe $\sigma, \tau \in D_n$ tels que tout élément de D_n se met sous la forme σ^k ou $\tau \circ \sigma^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Ce groupe a-t-il la même structure qu'un groupe connu (groupe de nombres, groupe cyclique, groupe de permutations. . .).

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note $C_k \approx \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ le groupe cyclique à k éléments. On appelle sous-groupe distingué H de G un sous-groupe tel que $\forall(g, h) \in G \times H$, $ghg^{-1} \in H$. Montrer que D_n contient un sous-groupe distingué isomorphe à C_n et un sous-groupe isomorphe à C_2, non distingué.

Pour $(G, \star)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes, $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de G et $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupes, on définit sur $G \times H$: $(g, h) \rtimes_\varphi (g', h') = (g \star \cdot \varphi(h)(g'), hh')$. Montrer que $G \rtimes_\varphi H = (G \times H, \rtimes_\varphi)$ est un groupe. Identifier $C_n \rtimes_\varphi C_2$ pour φ trivial, et $\varphi(1)(x) = -x$.

Inversion de Möbius. Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$. On définit $f*g(n) = \sum_{k\in\mathbf{N}*,k|n} f(k)g(n/k)$. Montrer que $(A,+,*)$ est un anneau commutatif, préciser ses inversibles. En notant φ l'indicatrice d'Euler, que vaut $\varphi * 1$?

On définit la fonction de Möbius par $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré, et $\mu(n) = (-1)^k$ où k est le nombre de premiers dans la décomposition de μ en facteurs premiers sinon. Montrer que $\mu = 1^{*-1}$.

On note pour $n \in \mathbf{N}^*$ Φ_n le n^{e} polynôme cyclotomique, c'est-à-dire dont les racines sont les racines de l'unité qui ne sont racines d'aucun Φ_k, $k \leqslant n$. Calculer Φ_1 à Φ_7, et exprimer $X^n - 1$ en fonction des Φ_k.

Pour $(G,\star)$ un groupe abélien, $f \in G^{\mathbf{N}*}$ et $u \in A$, on note $u.f(n) = \bigstar_{d\in\mathbf{N}*,d|n} f(d)^{\star g(n/d)}$. En s'aidant de la structure ainsi définie sur $\left(G^{\mathbf{N}*},\star,.\right)$, montrer que $\Phi_n = \prod_{d|n}(X^d-1)^{\mu(n/d)}$.

Généralisation du petit théorème de Fermat. Soit $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},+,\times)$ l'ensemble des entiers modulo n muni de sa structure canonique d'anneau. Quels sont les inversibles ? Combien y en a-t-il ?

Soit $a \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. En considérant $\prod_{x\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times}(a\times x)$, montrer que $a^{\phi(n)} = 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall a \in \mathbf{Z}$ premier avec n, $a^{\phi(n)} \equiv 1$ [mod$n$].

Groupe diédral. Soit $n \geqslant 3$. Justifier que l'ensemble des isométries du n-gone régulier forment un groupe, noté D_n. Les décrire explicitement. Montrer qu'il existe $\sigma, \tau \in D_n$ tels que tout élément de D_n se met sous la forme σ^k ou $\tau\circ\sigma^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Ce groupe a-t-il la même structure qu'un groupe connu (groupe de nombres, groupe cyclique, groupe de permutations. . .).

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note $C_k \approx \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ le groupe cyclique à k éléments. On appelle sous-groupe distingué H de G un sous-groupe tel que $\forall(g,h) \in G\times H$, $ghg^{-1} \in H$. Montrer que D_n contient un sous-groupe distingué isomorphe à C_n et un sous-groupe isomorphe à C_2, non distingué.

Pour $(G,\star)$ et $(H,\cdot)$ deux groupes, $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de G et $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupes, on définit sur $G\times H$: $(g,h)\rtimes_\varphi(g',h') = (g\star\cdot\varphi(h)(g'),hh')$. Montrer que $G\rtimes_\varphi H = (G\times H,\rtimes_\varphi)$ est un groupe. Identifier $C_n\rtimes_\varphi C_2$ pour φ trivial, et $\varphi(1)(x) = -x$.

Déterminer les matrices M à coefficients dans $\mathbf{N}$ telles que ${}^tM\times M = M\times{}^tM = I_n$.

Soient a, b, c, d quatre entiers. La matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(2a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(a+c) & \cos(b+c) & \cos(2c) & \cos(c+d) \\ \cos(a+d) & \cos(b+d) & \cos(c+d) & \cos(2d) \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique). En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$, et même de $GL_{n-1}(\mathbf{R})$.

Soit G un groupe commutatif non abélien. Montrer en utilisant le théorème de Lagrange que la probabilité que deux éléments de G commute est inférieure à $\frac{5}{8}$. Calculer en particulier cette probabilité pour G d'ordre p^3 de centre non trivial, et en déduire que l'inégalité est optimale.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|a_{k,k}| > \sum\limits_{i=1,i\neq k}^{n} |a_{i,k}|$. Montrer que A est inversible.

Généralisation du petit théorème de Fermat. Soit $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},+,\times)$ l'ensemble des entiers modulo n muni de sa structure canonique d'anneau. Quels sont les inversibles ? Combien y en a-t-il ?

Soit $a \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. En considérant $\prod_{x\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times}(a\times x)$, montrer que $a^{\phi(n)} = 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall a \in \mathbf{Z}$ premier avec n, $a^{\phi(n)} \equiv 1[\mod n]$.

Groupe diédral. Soit $n \geqslant 3$. Justifier que l'ensemble des isométries du n-gone régulier forment un groupe, noté D_n. Les décrire explicitement. Montrer qu'il existe $\sigma, \tau \in D_n$ tels que tout élément de D_n se met sous la forme σ^k ou $\tau \circ \sigma^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Ce groupe a-t-il la même structure qu'un groupe connu (groupe de nombres, groupe cyclique, groupe de permutations...).

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note $C_k \approx \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ le groupe cyclique à k éléments. On appelle sous-groupe distingué H de G un sous-groupe tel que $\forall (g,h) \in G \times H,\ ghg^{-1} \in H$. Montrer que D_n contient un sous-groupe distingué isomorphe à C_n et un sous-groupe isomorphe à C_2, non distingué.

Pour $(G, \star)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes, $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de G et $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupes, on définit sur $G \times H$: $(g,h) \rtimes_\varphi (g',h') = (g \star \cdot \varphi(h)(g'), hh')$. Montrer que $G \rtimes_\varphi H = (G \times H, \rtimes_\varphi)$ est un groupe. Identifier $C_n \rtimes_\varphi C_2$ pour φ trivial, et $\varphi(1)(x) = -x$.

Inversion de Möbius. Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$. On définit $f*g(n) = \sum_{k\in\mathbf{N}*,k|n} f(k)g(n/k)$. Montrer que $(A,+,*)$ est un anneau commutatif, préciser ses inversibles. En notant φ l'indicatrice d'Euler, que vaut $\varphi * 1$?

On définit la fonction de Möbius par $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré, et $\mu(n) = (-1)^k$ où k est le nombre de premiers dans la décomposition de μ en facteurs premiers sinon. Montrer que $\mu = 1^{*-1}$.

On note pour $n \in \mathbf{N}^*$ Φ_n le n^{e} polynôme cyclotomique, c'est-à-dire dont les racines sont les racines de l'unité qui ne sont racines d'aucun Φ_k, $k \leqslant n$. Calculer Φ_1 à Φ_7, et exprimer $X^n - 1$ en fonction des Φ_k.

Pour $(G,\star)$ un groupe abélien, $f \in G^{\mathbf{N}*}$ et $u \in A$, on note $u.f(n) = \bigstar_{d\in\mathbf{N}*,d|n} f(d)^{\star g(n/d)}$. En s'aidant de la structure ainsi définie sur $\left(G^{\mathbf{N}*},\star,.\right)$, montrer que $\Phi_n = \prod_{d|n}(X^d - 1)^{\mu(n/d)}$.

Généralisation du petit théorème de Fermat. Soit $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},+,\times)$ l'ensemble des entiers modulo n muni de sa structure canonique d'anneau. Quels sont les inversibles ? Combien y en a-t-il ?

Soit $a \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. En considérant $\prod_{x\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times}(a \times x)$, montrer que $a^{\phi(n)} = 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\forall a \in \mathbf{Z}$ premier avec n, $a^{\phi(n)} \equiv 1$ [mod$n$].

Probabilité que deux éléments commutent Soit G un groupe commutatif non abélien. Montrer en utilisant le théorème de Lagrange que la probabilité que deux éléments de G commute est inférieure à $\frac{5}{8}$. Calculer en particulier cette probabilité pour G d'ordre p^3 de centre non trivial, et en déduire que l'inégalité est optimale.

Matrices orthogonales et décomposition polaire Montrer que det est un morphisme de groupe surjectif $GL_2(\mathbf{R}) \twoheadrightarrow \mathbf{R}^*$.

On note $O_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que ${}^tM \times M = I_2$; on admet que cette dernière relation équivaut à $M \times {}^tM = I_2$. Montrer que $O_2(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbf{R})$, puis décrire algébriquement et géométriquement ses éléments.

Soit $\mathcal{C} := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est isomorphe (en tant qu'algèbre) à $\mathbf{C}$. Que représentent déterminant et transposition ? Montrer que tout élément de $\mathcal{C}$ s'écrit comme produit d'une matrice diagonale positive et d'un élément de $O_2(\mathbf{R})$ de déterminant 1.

En admettant que pour toute matrice symétrique S vérifiant $\forall X \in \mathbf{R}^2$, ${}^tXSX \geqslant 0$, il existe une matrice $\sqrt{S}$ symétrique telle que $\sqrt{S}^2 = I_2$, montrer que toute matrice de $GL_2(\mathbf{R})$ est produit d'une matrice de $O_2(\mathbf{R})$ et d'une matrice symétrique. *Ce résultat sera largement généralisable avec les outils de topologie de deuxième année.*

Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$ Soit $O_n(\mathbf{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : {}^tMM = I_n\}$ (cette relation équivaut à $M^tM = I_n$) : montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est un groupe. On dit que deux éléments A et B sont conjugués s'il existe P tel que $A = P^{-1}BP$, que deux ensembles sont conjugués si leurs éléments sont conjugués deux à deux pour un même P. Montrer que tout sous-ensemble conjugué à un sous-groupe fini de $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe fini. On étudie maintenant la réciproque.

Soit Γ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$. On définit pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$: $\langle x|y\rangle := \sum_{G\in\Gamma} {}^t(G.x)(G.y)$. Montrer que $\forall H \in \Gamma, x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle H.x|H.y\rangle = \langle x|y\rangle$ Montrer qu'il existe $B \in M_2(\mathbf{R})$ telle que que $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle x|y\rangle = {}^txBy$.

Exprimer les coefficients de B comme des $\langle x|y\rangle$, et en déduire que B est symétrique. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0_{\mathbf{R}^n}$. En déduire que B est inversible (on rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $MX = 0 \iff X = 0$).

On admet que ceci suffit à affirmer l'existence de $\sqrt{B}$ symétrique telle que $\sqrt{B}^2 = B$.

Construction de $\mathbf{C}$ Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. $I \subset A$ est appelé idéal de A si $(I,+)$ est un groupe, et $\forall(a,i) \in A \times I$, $a \times i \in I$. Montrer que si I est un idéal et un sous-anneau de A, alors $I = A$. Montrer qu'il en est de même si I est non trivial et A est un corps.

Soit $x \in A$. Montrer que $(x) := \{a \times x : a \in A\}$ est un idéal de A.

Soit I un idéal de A. $x \sim_I y \iff x - y \in I$ définit une relation d'équivalence sur A, et montrer que $+$ et $\times$ induisent une structure d'anneau sur l'ensemble des classes d'équivalence A/I.

L'on note par la suite $\mathcal{C} := \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$. En utilisant notamment la relation de Bézout sur les polynômes et en constatant que $X^2 + 1$ ne possède pas de diviseur non constant, montrer que $\mathcal{C}$ est un corps, que -1 y possède une racine carrée, et qu'il est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$ Soit $O_n(\mathbf{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : {}^tMM = I_n\}$ (cette relation équivaut à $M^tM = I_n$) : montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est un groupe.

Soit Γ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$. On définit pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$: $\langle x|y\rangle := \sum_{G\in\Gamma} {}^t(G.x)(G.y)$. Montrer que $\forall H \in \Gamma, x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle H.x|H.y\rangle = \langle x|y\rangle$ Montrer qu'il existe $B \in M_2(\mathbf{R})$ telle que que $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle x|y\rangle = {}^txBy$.

Montrer que B est symétrique. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0_{\mathbf{R}^n}$, et en déduire que B est inversible. *On admet que ceci suffit à affirmer l'existence de* $\sqrt{B}$ *symétrique telle que* $\sqrt{B}^2 = B$.

On dit que deux éléments A et B sont conjugués s'il existe P tel que $A = P^{-1}BP$, que deux ensembles sont conjugués si leurs éléments sont conjugués deux à deux pour une même matrice P. Montrer que les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$ sont les ensembles conjugués aux sous-groupes de $O_n(\mathbf{R})$.

Construction de $\mathbf{C}$ Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. $I \subset A$ est appelé idéal de A si $(I, +)$ est un groupe, et $\forall (a, i) \in A \times I$, $a \times i \in I$.

Soit $x \in A$. Montrer que $(x) := \{a \times x : a \in A\}$ est un idéal de A.

Soit I un idéal de A. Montrer que $x \sim_I y \iff x - y \in I$ définit une relation d'équivalence sur A, et montrer que $+$ et $\times$ induisent une structure d'anneau sur l'ensemble des classes d'équivalence A/I.

L'on note par la suite $\mathcal{C} := \mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un corps, que $-1_{\mathcal{C}}$ y possède une racine carrée, et qu'il est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Soient a, b et c trois nombres complexes distincts. Résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 \\ b^4 \\ c^4 \end{pmatrix}$$

Indication : le théorème de D'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme complexe sans non constant admet une racine.

Résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = & 1 \end{array} \right.$$

Indication : introduire les quantités $\sigma_1 := x + y + z$, $\sigma_2 := xy + yz + xz$ *et* $\sigma_3 := xyz$.

Duplication du cube On appelle *nombre constructible* la longueur ou l'opposée de la longueur d'un segment construit à partir d'un segment de longueur 1 à la règle (non graduée) et au compas. Soit A l'ensemble des nombres constructibles.

Montrer que A est stable par les quatre opérations arithmétiques et par passage à la racine carrée. En déduire que $\mathbf{Q} \subset A$.

Réciproquement, soit $a \in A$. Montrer qu'il existe une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, a_{j+1} est racine d'un polynôme de degré 1 ou 2 à coefficients dans $\mathbf{Q}[a_0, \ldots, a_j]$.

Pour $x \in \mathbf{C}$, on note $I_x := \{P \in \mathbf{Q}[X] : \tilde{P}(x) = 0\}$. Montrer que I_x est de la forme $\{Q \times \pi_x : Q \in \mathbf{Q}[X]\}$ où π_X est un polynôme unitaire à coefficients rationnels (polynôme minimal). Montrer que π_X est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Montrer que si a est constructible, alors $\deg \pi_a$ est une puissance de deux, et en déduire qu'on ne peut pas, étant donné un cube, construire avec une règle et un compas un cube de volume double.

Construction de **C** Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. $I \subset A$ est appelé idéal de A si $(I, +)$ est un groupe, et $\forall (a, i) \in A \times I$, $a \times i \in I$.

Soit $x \in A$. Montrer que $(x) := \{a \times x : a \in A\}$ est un idéal de A.

Soit I un idéal de A. Montrer que $x \sim_I y \iff x - y \in I$ définit une relation d'équivalence sur A, et montrer que $+$ et $\times$ induisent une structure d'anneau sur l'ensemble des classes d'équivalence A/I.

L'on note par la suite $\mathcal{C} := \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un corps, que $-1_{\mathcal{C}}$ y possède une racine carrée, et qu'il est isomorphe à $\mathbf{C}$.

Un théorème de Liouville Pour $P \in \mathbf{C}[X]$, notons $\operatorname{rad} P := \prod_{\alpha \in Z(P)} (X - \alpha)$ et $r(P) = \deg(\operatorname{rad}(P))$. Montrer que pour $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, $r(PQ) \leqslant r(P) + r(Q)$; quand y a-t-il égalité ?

Soient $P, Q, R \in \mathbf{C}[X]$ premiers entre eux non constants tels que $P+Q+R = 0$. Montrer que $PQ' - P'Q = QR' - Q'Q = RP' - P'R$. On note Δ cette quantité ; montrer que $\Delta \neq 0$. Montrer que $(\deg P - r(P)) + (\deg Q - r(Q)) + (\deg R - r(R)) \leqslant \deg \Delta$, et en déduire que $\max(\deg P, \deg Q, \deg R) \leqslant r(PQR) - 1$ (théorème de Mason).

En déduire que l'équation $A^n + B^n = C^n$ n'admet pas de solution qui soit un triplet de polynômes non constants premiers entre eux pour $n \geqslant 3$. En possède-t-elle pour $n = 2$?

Problèmes de l'Antiquité Montrer qu'à partir d'un carré, on peut construire à la règle (non graduée) et au compas un carré d'aire double (cf. Platon, *Ménon*).

On appelle *nombre constructible* la longueur ou l'opposée de la longueur d'un segment construit à partir d'un segment de longueur 1 à la règle (non graduée) et au compas. Soit A l'ensemble des nombres constructibles.

Montrer que A est stable par les quatre opérations arithmétiques et par passage à la racine carrée. En déduire que $\mathbf{Q} \subset A$.

Réciproquement, soit $a \in A$. Montrer que a peut s'écrire uniquement à l'aide des cinq opérations précitées et des entiers (théorème de Wantzel).

Justifier que l'on ne peut pas, étant donné le patron d'un cube, construire avec une règle et un compas un patron de cube de volume double. Montrer en exprimant $\cos(3x)$ comme polynôme en $\cos(x)$ qu'il n'existe pas de méthode générale de trisection de l'angle à la règle et au compas. En admettant que π n'est racine d'aucun polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ (Lindemann 1882, faisable en sup' mais un peu long), montrer que la quadrature du cercle est un problème sans solution.

Méthode de Cardan L'on cherche les solutions complexes des équations de la forme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ et a non nul.

Montrer que l'on peut par un changement de variable se ramener à $z^3 + pz + q = 0 (E)$.

On suppose que $z = u + v$. Quelle condition peut-on imposer sur u et v pour obtenir une équation de la forme $u^3 + v^3 = \text{constante}$? Résoudre les deux équations obtenues.

En déduire l'expression des solutions de l'équation ; discuter leur nombre et leur réalité.

Résoudre $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$.

Méthode de Cardan L'on cherche les solutions complexes des équations de la forme $az^3+bz^2+cz+d=0$ avec $a,b,c,d \in \mathbf{C}$ et a non nul.

Montrer que l'on peut par un changement de variable se ramener à $z^3+pz+q=0 (E)$.

On suppose que $z=u+v$. Quelle condition peut-on imposer sur u et v pour obtenir une équation de la forme $u^3+v^3=$ constante ? Résoudre les deux équations obtenues.

En déduire l'expression des solutions de l'équation ; discuter leur nombre et leur réalité.

Résoudre $x^3-6x^2+9x-1=0$.

Théorème de Gauss-Lucas Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On appelle *combinaison linéaire convexe* de la famille $(x_i)_{i\in I}$ une combinaison linaire dont les coefficients sont positifs et dont la somme des coefficients vaut 1. On appelle *enveloppe convexe* de $(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble de ses combinaisons linéaires convexes.

Représenter l'enveloppe convexe des différents familles de $\mathbf{R}^2$ tracées au tableau (on pourra se contenter de conjectures, les démonstrations précises sur ce point relevant du programme de seconde année).

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P. *Indication : on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.*

Un théorème de Liouville Pour $P \in \mathbf{C}[X]$, notons $\operatorname{rad} P := \prod_{\alpha\in Z(P)}(X-\alpha)$ et $r(P)=\deg(\operatorname{rad}(P))$. Montrer que pour $P,Q \in \mathbf{C}[X]$, $r(PQ) \leqslant r(P)+r(Q)$; quand y a-t-il égalité ?

Soient $P,Q,R \in \mathbf{C}[X]$ premiers entre eux non constants tels que $P+Q+R=0$. Montrer que $PQ'-P'Q=QR'-Q'Q=RP'-P'R$. On note Δ cette quantité ; montrer que $\Delta \neq 0$. Montrer que $(\deg P - r(P)) + (\deg Q - r(Q)) + (\deg R - r(R)) \leqslant \deg \Delta$, et en déduire que $\max(\deg P, \deg Q, \deg R) \leqslant r(PQR)-1$ (théorème de Mason).

En déduire que l'équation $A^n+B^n=C^n$ n'admet pas de solution qui soit un triplet de polynômes non constants premiers entre eux pour $n \geqslant 3$. En possède-t-elle pour $n=2$?

Construction de nouveaux espaces vectoriels Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$-ev et F un sev de E. Notons $a \sim_F b \Leftrightarrow a-b \in F$. Montrer que $\sim_F$ définit une relation d'équivalence sur E. Décrire ses classes d'équivalence.

On note E/F l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim_F$. Montrer que les lois $+$ et $\cdot$ sont compatibles avec cette relation d'équivalence. On note $\tilde{+}$ et $\tilde{\cdot}$ les lois induites. Montrer que $(E/F, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Application : sur $E := \mathcal{C}^0_{pm}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, on définit $d(f,g) := \int_0^1 |f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$ la « distance » entre les fonctions f et g. Montrer qu'il existe des fonctions f et g telles que $d(f,g)=0$ mais $f \neq g$: d ne correspond pas à l'idée intuitive de « distance ».

On note alors $F := \{f \in E : d(f,0)=0\}$. Montrer que F est un sev de E, et que d est compatible avec $\sim_F$. On note $\tilde{d}$ l'application induite sur E/F ; montrer que $\tilde{d}$ a la propriété de séparation : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in E/F, \tilde{d}(\tilde{f},\tilde{g})=0 \iff \tilde{f}=\tilde{g}$.

E/F est appelé $L^1([0,1])$, et $\tilde{d}$ définit une distance « naturelle » sur cet espace, très utile en probabilités. On définit de façon semblable $L^2([0,1])$, espace important en mécanique quantique.

Unions d'espaces vectoriels Pour $m > n$ des entiers, on identifie $\mathbf{R}^n$ à un sous-espace vectoriel de R^m de la façon suivante : $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ est identifié à $(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0) \in \mathbf{R}^m$. Définir une structure d'espace vectoriel sur $E = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} R^n$. À quel(s) espace(s) vectoriel(s) connus peut-on identifier E ?

Unions d'espaces vectoriels Soient $\mathbf{K}$ un corps infini, E un $\mathbf{K}$-ev, $F_1, \ldots, F_n$ n sev *stricts* de E. Montrer que $E \neq \bigcup_{i=1}^n F_i$. Ce résultat reste-t-il vrai si $\mathbf{K}$ est fini ?

Construction de nouveaux espaces vectoriels Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$-ev et F un sev de E. Notons $a \sim_F b \Leftrightarrow a - b \in F$. Montrer que $\sim_F$ définit une relation d'équivalence sur E. Décrire ses classes d'équivalence.

On note E/F l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim_F$. Montrer que les lois $+$ et $\cdot$ sont compatibles avec cette relation d'équivalence. On note $\tilde{+}$ et $\tilde{\cdot}$ les lois induites. Montrer que $(E/F, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Application : sur $E := \mathcal{C}^0_{pm}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, on définit $d(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t$ la « distance » entre les fonctions f et g. Montrer qu'il existe des fonctions f et g telles que $d(f,g) = 0$ mais $f \neq g$: d ne correspond pas à l'idée intuitive de « distance ».

On note alors $F := \{f \in E : d(f,0) = 0\}$. Montrer que F est un sev de E, et que d est compatible avec $\sim_F$. On note $\tilde{d}$ l'application induite sur E/F ; montrer que $\tilde{d}$ a la propriété de séparation : $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in E/F, \tilde{d}(\tilde{f}, \tilde{g}) = 0 \iff \tilde{f} = \tilde{g}$.

E/F est appelé $L^1([0,1])$, et $\tilde{d}$ définit une distance « naturelle » sur cet espace, très utile en probabilités. On définit de façon semblable $L^2([0,1])$, espace important en mécanique quantique.

Un peu d'algèbre Soit $a \in \mathbf{C}$. On note $\mathbf{Q}[a] := \{P(a) : P \in \mathbf{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

On dit qu'un nombre ℓ est *algébrique* s'il existe $\Pi \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $\Pi(\ell) = 0$. En ce cas, on note Π_ℓ le polynôme unitaire de degré minimal qui convient (pourquoi est-il unique ?), appelé *polynôme minimal de ℓ*. Le *degré* de ℓ est alors défini comme le degré de Π_ℓ. $\ell \mapsto \Pi_\ell$ est-elle linéaire ? Montrer que ℓ est algébrique si et seulement si $\mathbf{Q}[\ell]$ est de dimension fine, et qu'alors $\dim \mathbf{Q}[\ell] = \deg \ell$.

Montrer que Π_ℓ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, et en déduire que $\mathbf{Q}[\ell]$ est un corps.

Un lemme classique Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ des formes linéaires sur E un $\mathbf{K}$-ev. Montrer que $\psi \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \iff \bigcap_{i=1}^n \ker \phi_i \subset \ker \psi$. (Indication : étudier l'image de l'application $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi)$).

Unions d'espaces vectoriels — Soient $\mathbf{K}$ un corps infini, E un $\mathbf{K}$-ev, $F_1, \ldots, F_n$ n sev *stricts* de E. Montrer que $E \neq \bigcup_{i=1}^n F_i$. Ce résultat reste-t-il vrai si $\mathbf{K}$ est fini ?

Un lemme classique — Soient $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ des formes linéaires sur E un $\mathbf{K}$-ev. Montrer que $\psi \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \iff \bigcap_{i=1}^n \ker \phi_i \subset \ker \psi$. (Indication : étudier l'image de l'application $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi)$).

Espaces vectoriels et nombres algébriques — Soit $\mathbf{K}$ un corps, et $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ un corps algébriquement clos.

On dit qu'un nombre $\ell \in$ est *algébrique sur* $\mathbf{K}$ s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. En ce cas, on note Π_ℓ le polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ de degré minimal qui convienne (pourquoi est-il unique ?), appelé *polynôme* $\mathbf{K}$*-minimal de* ℓ. $\ell \mapsto \Pi_\ell$ est-elle linéaire ? Montrer que ℓ est algébrique si et seulement si $\mathbf{K}[\ell]$ est de dimension fine, et qu'alors $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[\ell] = \deg \Pi_\ell$.

Soient $\mathbf{F} \subset \mathbf{H}$ deux corps ; montrer que $\mathbf{H}$ est un $\mathbf{F}$-ev. Pour $\mathbf{M} \supset K$ un troisième corps, montrer que $\dim_{\mathbf{F}} \mathbf{M} < \infty \iff (\dim_{\mathbf{F}} \mathbf{H} < \infty \wedge \dim_{\mathbf{H}} \mathbf{M} < \infty)$. Montrer qu'en ce cas, $\dim_{\mathbf{F}} \mathbf{M} = \dim_{\mathbf{F}} \mathbf{H} \times \dim_{\mathbf{H}} \mathbf{M}$.

On admet que $\mathrm{alg}(\mathbf{K})$, ensemble des $\ell \in \mathbf{L}$ algébriques sur $\mathbf{K}$, est un corps. Montrer que $\mathrm{alg}(\mathbf{L})$ est algébriquement clos.

Structure des algébriques — Soit $\mathbf{K}$ un corps, et $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ un corps algébriquement clos.

On dit qu'un nombre $\ell \in$ est *algébrique sur* $\mathbf{K}$ s'il est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, ce qui équivaut (admis) à dire que $\mathbf{K}[\ell]$ est de $\mathbf{K}$-dimension finie. En ce cas, on note Π_ℓ le polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ de degré minimal qui convienne, appelé *polynôme* $\mathbf{K}$*-minimal de* ℓ ; on admet que $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}[\ell] = \deg \Pi_\ell$. On note $\mathrm{alg}(\mathbf{K})$ l'ensemble des algébriques sur $\mathbf{K}$.

Pour ℓ algébrique, montrer que Π_ℓ est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$. En déduire que pour $x \in \mathbf{L}$, $\mathbf{K}[x]$ est un corps si et seulement si $x \in \mathrm{alg}(\mathbf{K})$, puis que $\mathrm{alg}(\mathbf{K})$ est stable par passage à l'inverse.

Pour $\mathbf{F} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{M}$ des corps, on admet la relation (dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$) : $\dim_{\mathbf{F}} \mathbf{M} = \dim_{\mathbf{F}} \mathbf{H} \times \dim_{\mathbf{H}} \mathbf{M}$. Montrer que $\mathrm{alg}(\mathbf{K})$ est un corps.

Algèbres sur $\mathbf{R}$ — Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre (*ie* un anneau *et* un $\mathbf{R}$-ev) unitaire, commutative, et intègre de dimension finie. Montrer que A est un corps. En déduire que A est soit isomorphe à $\mathbf{R}$, soit isomorphe à $\mathbf{C}$ en tant qu'algèbre (ie : il existe une application qui soit morphisme de corps *et* d'anneau unitaire).

Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Montrer que $(\log p)_{p \in \mathbf{P}}$ est une famille libre du $\mathbf{Q}$-ev $\mathbf{R}$.

Approximations par des densités — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux. On appelle *approximation de la densité de* f une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $I \longrightarrow \mathbf{C}$ continues par morceaux équibornée (il existe un majorant commun aux f_n) et telle que $\forall[a,b] \subset I$, $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$.

Montrer que $(x \longmapsto e^{inx})$ est une approximation de la densité de $[0]$, $(x \longmapsto |\sin(nx)|)$ une approximation de l'unité de $[\frac{2}{\pi}]$.

Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_I f_n(x)g(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Normes de fonction — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. On note pour $x \in \mathbf{R}+$, $\|f\|_x := \left(\int_I |f(t)|^x \mathrm{d}t\right)^{1/x}$. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbf{C})$.

On admet que pour tout $x \geqslant 1$, $\|.\|_x$ est une norme sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbf{C})$. Montrer que $\|f\|_x \xrightarrow[x\to\infty]{} \|f\|_\infty$.

Que peut-on dire si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Une inégalité classique — Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue de moyenne nulle. Montrer que : $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant -\min f \max f$.

Monotonie, moyennes et produits — Soit I un intervalle réel. On note pour $h : I \longmapsto \mathbf{R}$ continue par morceaux $\langle f\rangle$ sa valeur moyenne. Soient f et g deux fonctions monotones de I dans $\mathbf{R}_+$. Comparer $\langle fg\rangle$ et $\langle f\rangle\langle g\rangle$.

Indication : on pourra admettre le théorème de Fubini *: pour* $h : I^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ *continue,* $\int_I \left(\int_I h(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_I h(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Convergence d'intégrales — Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une suite de fonctions continues convergent uniformément vers f. En admettant que f est continue, montrer que $\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f$. Ce résultat reste-t-il vrai si la convergence n'est plus supposée uniforme ?

Montrer le résultat admis : toute suite de fonctions continue convergent uniformément possède une limite continue.

Limites de suites, limites de fonctions et continuité — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[\infty]{} 0$.

Montrer que ce n'est plus vrai si l'on ne suppose pas f continue.

On admet le théorème de Baire : toute réunion dénombrable de fermés de $\mathbf{R}$ d'intérieur vide est d'intérieur vide. Montrer que ce résultat reste vrai si f est seulement supposée continue.

Espaces L^p — Soient $a < b$ et $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbf{C})$ et $p \geqslant 1$, on note $\|f\|_x := \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$. On admet que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire ; montrer que c'est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{C})$. Est-ce une norme sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbf{C})$?

Montrer que $N_p := \{f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbf{C}) : \|f\|_p = 0\}$ est un espace vectoriel. On note $f \underset{p}{\sim} g \iff f - g \in N_p$. Montrer que $\underset{p}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbf{C})$, et décrire ses classes. Montrer que l'espace quotient $L^p := C^0_{pm}([a,b],\mathbf{C})/\underset{p}{\sim}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, et que $\|.\|_p$ y définit une norme.

Méthode des trapèzes Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. En utilisant la fonction $x \mapsto f''(x)(x-b)(x-a)$, majorer l'écart entre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et l'aire du trapèze de sommets $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$, $(a,f(a))$. En déduire la vitesse de convergence de la méthode des trapèzes.

Monotonie, moyennes et produits — Soit I un intervalle réel. On note pour $h : I \longmapsto \mathbf{R}$ continue par morceaux $\langle f\rangle$ sa valeur moyenne. Soient f et g deux fonctions monotones de I dans $\mathbf{R}_+$. Comparer $\langle fg\rangle$ et $\langle f\rangle\langle g\rangle$.
Indication : on pourra travailler avec admettre le théorème de Fubini *: pour* $h : I^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ *continue,* $\int_I \left(\int_I h(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_I h(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$*, et travailler avec les quantités :*

$$J := \int_I \left(\int_I (f(x)g(x) + f(y)g(y))\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \text{ et } H := \int_I \left(\int_I (f(x)g(y) + f(x)g(y))\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Normes de fonction — Soient I un segment et $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. On note pour $x \in \mathbf{R}+$, $\|f\|_x := \left(\int_I |f(t)|^x \mathrm{d}t\right)^{1/x}$. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbf{C})$.

On admet que pour tout $x \geqslant 1$, $\|.\|_x$ est une norme sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbf{C})$. Montrer que $\|f\|_x \xrightarrow[x\to\infty]{} \|f\|_\infty$.

Que peut-on dire si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Intégrale trigonométrique Soient $a,b > 0$. Montrer que l'intégrale $A(a,b) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$ est bien définie. Justifier que A est symétrique et en déduire en calculant $A(a,b) + A(b,a)$ que $A(a,b) = \frac{1}{2}A\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab\right)$.

Posons $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2$, $v_{n+1} = u_n v_n$. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{\log u_n}{2^n} \leqslant A(a,b) \leqslant \frac{\log v_n}{2^n}$. En étudiant les suites $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})_{n\in\mathbf{N}}$, calculer $A(a,b)$.

Soit

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1 + x\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

Majorer $\frac{1}{h}\left|A(1,x+h) - A(1,x) - hI\right|$ pour en déduire la valeur de I.

Matrice compagnon Soient $\mathbf{K}$ un corps, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Montrer que l'application qui a Q associe le reste de la division euclidienne de XQ par P est un endomorphisme de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique, notée C.

On admet que P est un polynôme annulateur de C (théorème de Cayley-Hamilton). Montrer que si Q est un polynôme annulateur de C de degré $< n$, alors Q est nul. En déduire que P est *le* polynôme unitaire de degré minimal annulant C.

On se donne les polynômes $H_0 = 1$ et $H_i = XH_{i-1} + a_{n-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Calculer H_d, et montrer que C est semblable à sa transposée.

Matrice compagnon Soient $\mathbf{K}$ un corps, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. Montrer que l'application qui a Q associe le reste de la division euclidienne de XQ par P est un endomorphisme de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique, notée C.

On admet que P est un polynôme annulateur de C (théorème de Cayley-Hamilton). Montrer que si Q est un polynôme annulateur de C de degré $< n$, alors Q est nul. En déduire que P est *le* polynôme unitaire de degré minimal annulant C.

On se donne les polynômes $H_0 = 1$ et $H_i = XH_{i-1} + a_{n-i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Calculer H_d, et montrer que C est équivalente à sa transposée.

Plongements de groupes Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique). En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$, et même de $GL_{n-1}(\mathbf{R})$.

Déterminer les morphismes de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$.

Rang du groupe de permutations Soient $\tau = (a_1 a_2 \dots a_k)$ un k-cycle d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Décrire la permutation $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$.

On définit le *rang* d'un groupe de type fini comme le cardinal d'une famille génératrice minimale. À l'aide de la question précédente, majorer le rang de $\mathfrak{S}_n$ par $n - 1$; puis par deux. En déduire le rang de $\mathfrak{S}_n$ selon n.

Sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre $(n-1)!$ Soient $(G, \cdot)$ un groupe, H un sous-groupe. L'on dit que H est un sous-groupe *distingué* de G si $\forall g \in G, \forall h \in H, g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$. Montrer que le noyau d'un morphisme de groupe est distingué dans l'ensemble d'origine.

On admet que pour $n \geqslant 3$, le seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Soient $n \geqslant 3$ et H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre $(n-1)!$. On souhaite montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. Montrer que la relation sur $\mathfrak{S}_n$ définie par $\sigma \equiv \tau \iff \sigma \circ \tau^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence ; on note $\mathfrak{S}_n/H$ l'ensemble de ses classes. Calculer le cardinal des classes, puis celui de $\mathfrak{S}_n/H$.

Définir une application « multiplication à gauche » de la forme $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n/H \longrightarrow \mathfrak{S}_n/H$. En déduire l'existence d'un isomorphisme $\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n/H)$. Conclure.

Problème à 1000 \$ On considère un jeu de taquin de taille 4×4. Les cases peuvent être identifiées comme aux échecs par deux coordonnées (A1, A2, A3, A4, B1, ...).

On peut représenter une combinaison possible du jeu comme une permutation de $[\![1, 15]\!]$ correspondant aux numéros lus sur A1, A2, A3, A4, B4, B3, B2, B1, C1, C2, C3, C4, D4, D3, D2, D1, la case vide n'étant pas prise en compte.

En étudiant les propriétés du groupe des mouvements autorisés, indiquer s'il est possible de résoudre le jeu à partir de la position de départ suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Soient $n \geqslant 3$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la matrice $(\cos(a_i + a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ n'est pas inversible.

Soient $n \geqslant 2$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, f_σ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$.

Montrer que $p := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$ est une projection dont on précisera le noyau et l'image.

Problème à 1000 \$ On considère un jeu de taquin de taille 4×4. Les cases peuvent être identifiées comme aux échecs par deux coordonnées (A1, A2, A3, A4, B1, ...).

On peut représenter une combinaison possible du jeu comme une permutation de $[\![1, 15]\!]$ correspondant aux numéros lus sur A1, A2, A3, A4, B4, B3, B2, B1, C1, C2, C3, C4, D4, D3, D2, D1, la case vide n'étant pas prise en compte.

En étudiant les propriétés du groupe des mouvements autorisés, indiquer s'il est possible de résoudre le jeu à partir de la position de départ suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Soient $n \geqslant 2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, f_σ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$. Calculer $\det f_\sigma$.

Montrer que $p := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$ est une projection dont on précisera le noyau et l'image.

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $\varphi(A) := {}^tA$. Calculer le déterminant de φ.

Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices semblables dans $\mathbf{C}$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathbf{R}$.

Approximations par des densités — Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux. On appelle *approximation de la densité de* f une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $I \longrightarrow \mathbf{C}$ continues par morceaux équibornée (il existe un majorant commun aux f_n) et telle que $\forall [a, b] \subset I$, $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f$.

Montrer que $(x \longmapsto e^{inx})$ est une approximation de la densité de $[0]$, $(x \longmapsto |\sin(nx)|)$ une approximation de la densité de $[\frac{2}{\pi}]$.

Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_I f_n(x) g(x) \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_I f(x) g(x) \mathrm{d}x$.

Algèbres sur $\mathbf{R}$ — Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre (*ie* un anneau *et* un $\mathbf{R}$-ev) unitaire, commutative, et intègre de dimension finie. Montrer que A est un corps. En déduire que A est soit isomorphe à $\mathbf{R}$, soit isomorphe à $\mathbf{C}$ en tant qu'algèbre (ie : il existe une application qui soit morphisme de corps *et* d'anneau unitaire).

Décomposition de Frobenius On appelle *idéal* d'un anneau commutatif $(A,+,\times)$ un sous-groupe I de $(A,+)$ tel que $\forall(i,a)\in I\times A,\ i\times a\in I$. Montrer que tout idéal de $(\mathbf{K}[X],+,\times)$ est de la forme $\{P\times Q : Q\in\mathbf{K}[X]\}$ avec P unitaire, et que P est unique ; on appelle P le *générateur* de I. On suppose maintenant $\mathbf{K}$ infini.

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\varphi\in L(E)$; on note $I_\varphi := \{P\in\mathbf{K}[X] : P(\varphi)=0\}$ et pour $x\in E$, $I_{\varphi,x} := \{P\in\mathbf{K}[X] : P(\varphi)(x)=0\}$. Montrer que I_φ et les $I_{\varphi,x}$ sont des idéaux, dont on notera respectivement π_φ et $\pi_{\varphi,x}$ le générateur unitaire. Justifier que l'ensemble $\{\pi_{\varphi,x} : x\in E\}$ est fini.

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels *stricts* de E. Montrer que $E\neq\bigcup_{i=1}^n F_i$. En déduire qu'il existe $x\in E$ tel que $\pi_{\varphi,x}=\pi_\varphi$.

On note d le degré de π_φ. Montrer que $(x,\varphi(x),\dots,\varphi^{d-1}(x))$ est une base du plus petit espace vectoriel stable par φ et contenant x noté E_x. Donner la matrice de φ dans cette base, notée $C(\pi_\varphi)$.

Soit f une forme linéaire définie sur E valant 0 en $\varphi^i(x)$ pour $0\leqslant i\leqslant p-2$ et 1 en $\varphi^{d-1}(x)$; on définit $F := \{y\in E : \forall i\in\mathbf{N}, f(\varphi^i(y))=0\}$. Montrer que $F\cap E_x=0$. On introduit l'application

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbf{K}[\varphi] & \longrightarrow & E^* \\ & & g & \longmapsto & f\circ g \end{array}$$

Calculer le rang de T, puis montrer que $\dim F+\operatorname{rg}T=n$. En déduire que F est un supplémentaire de E stable par φ.

En déduire que toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & O & \dots & O \\ O & C(P_2) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & C(P_k) \end{pmatrix}$$

où $P_1,\dots,P_k\in\mathbf{K}[X]$ et $P_k|P_{k-1}|\dots|P_1$.

On montrerait que les polynômes P_i sont uniques, et que deux matrices partagent la même suite de polynômes P_i si et seulement si elles sont semblables.

En déduire que toute matrice est semblable à sa transposée.

Problème à 1000 \$ On considère un jeu de taquin de taille 4×4. Les cases peuvent être identifiées comme aux échecs par deux coordonnées (A1, A2, A3, A4, B1, ...).

On peut représenter une combinaison possible du jeu comme une permutation de $[\![1, 15]\!]$ correspondant aux numéros lus sur A1, A2, A3, A4, B4, B3, B2, B1, C1, C2, C3, C4, D4, D3, D2, D1, la case vide n'étant pas prise en compte.

En étudiant les propriétés du groupe des mouvements autorisés, indiquer s'il est possible de résoudre le jeu à partir de la position de départ suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Entraînement à la mêlée (ultra-classique !) Une équipe de rugby de $2n + 1$ joueurs s'entraîne à la mêlée. Si un joueur quelconque décide décide d'être provisoirement entraîneur, alors il peut séparer ses camarades en deux packs de n joueurs, les deux packs ayant même masse. Montrer que tous les joueurs ont la même masse.

Indication : ramener ce problème au calcul du noyau d'une matrice M d'ordre $2n+1$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. Trouver un vecteur non nul du noyau, et montrer que M a rang $2n$ en calculant un déterminant. On pourra faciliter le calcul en travaillant dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$...

La comatrice est multiplicative Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. L'on souhaite montrer que $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{Com}(MN) = \mathrm{Com}(M)\,\mathrm{Com}(N)$. Montrer que cette égalité est vérifiée si M et N sont toutes deux inversibles, puis si M ou N est de rang inférieur à $n - 2$.

On se place dans le corps des fractions rationnelles à $2n^2$ indéterminées $\mathbf{K}(X_1, \dots, X_{n^2}, Y_1, Y_{n^2})$. Montrer que l'inégalité précédente est vraie pour

$$M := \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n & \dots & X_{n^2} \end{pmatrix} ; N := \begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_{n^2-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n & \dots & Y_{n^2} \end{pmatrix}$$

et en déduire le résultat pour toute matrice de $\mathbf{K}$.

Soit $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ convergeant vers M_∞ de rang r. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que les M_k soient de rang au moins r pour tout $k \geqslant k_0$.

On pourra admettre que les propriétés topologiques de $\mathbf{R}$ (convergence, continuité...) restent vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, la convergence et la continuité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ étant définies coefficient par coefficient.

Soient $n \geqslant 3$ et $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des réels. Calculer :

$$\begin{vmatrix} \cos(2a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(2a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & \dots & \cos(2a_n) \end{vmatrix}$$

Soient $\mathbf{K}$ un corps, $a, b, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$ avec $a \neq b$. Calculer le déterminant de la matrice M suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & a & \ldots & \ldots & a \\ b & x_2 & \ddots & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & x_{n-1} & a \\ b & \ldots & \ldots & b & x_n \end{pmatrix}$$

On pourra étudier la fonction $D : t \longmapsto \det(M + tA)$ *où* A *est la matrice « Attila » dont tous les coefficients sont égaux à* 1.

Calculer ce déterminant dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $b = a$.

Théorème de Cayley-Hamilton Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un espace vectoriel de dimension finie n et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On se place dans $\mathbf{K}(X)$ pour définir $\chi_M(X) := \det(X \cdot I - M)$. Calculer le degré d de χ_M et ses coefficients d'ordre d, 0 et $d-1$, et montrer que χ est invariant par similitude. Montrer que la réciproque est fausse.

Justifier que l'on peut écrire ${}^t\,\mathrm{Com}(X \cdot I - M) = \sum_{j=0}^{n} X^j \cdot B_j$. Puis, à l'aide d'une relation liant cette dernière matrice à $X \cdot I - A$ et χ_M, donner une relation liant les B_j aux coefficients de χ_M et en déduire que χ_M annule M.

Critère d'Abel Soient $\sum v_n$ une série dont la suite des sommes partielles est bornée, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle telle que $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que $\sum u_n v_n$ est convergente.

Produits de Cauchy Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente, $\sum v_n$ une série convergente. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Montrer que $\sum w_n$ converge et calculer sa somme (*on pourra commencer par le cas où* $\sum v_n$ *est de somme nulle*).

En déduire, pour $k \in \mathbf{N}^*$, l'existence d'une suite H_n telle que $\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} H_n z^n = (1-z)^{-k}$.

Séries de Bertrand Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1,1)$ pour l'ordre lexicographique.

Convergence inconditionnelle Soient $\sum z_n$ une série complexe absolument convergente et σ une permutation de $\mathbf{N}$. Montrer que $\sum z_{\sigma(n)}$ converge.

Réciproquement, soit $z_n = x_n + iy_n$ telle que $\sum |z_n|$ diverge, et l'on souhaite construire $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que $\sum z_{\sigma(n)}$ diverge. Montrer que l'une des deux séries $\sum |x_n|$ ou $\sum |y_n|$ diverge. On suppose par exemple que c'est le cas de $\sum |x_n|$. Conclure dans le cas où$(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang. Dans le cas contraire, on se donne $(x_{\varphi(n)})$ la sous-suite des termes positifs. Montrer que l'on peut supposer $\sum x_{\varphi(n)}$ divergente, et conclure.

Règle de Raabe-Duhamel Soit $\sum u_n$ une série telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge ; si $\alpha < 1$ alors elle diverge ; et qu'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.

Produits infinis Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. L'on dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite de ses produits partiels possède une limite, qu'il converge strictement si cette limite est de plus non nulle.

On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < |u_n| < 1$. Montrer que le produit $\prod(1+u_n)$ converge strictement si, et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument.

Critère de Cauchy Soit $\sum u_n$ une série complexe. On pose $p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Montrer que si $p < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument ; que si $p > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement, et qu'on ne peut pas conclure si $p = 1$.

On considère la série $S(z) = \sum u_n z^n$. Montrer que si $|z| < |z'|$ et $S(z')$ converge, alors $S(z)$ converge absolument. En déduire l'existence de $\rho(u) > 0$ tel que si $|z| < \rho(u)$, alors $S(z)$ converge absolument et si $z > \rho(u)$, alors $S(z)$ diverge grossièrement. Quel est le lien entre $\rho(u)$ et p ?

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit définie et ait une limite ℓ. Quel est le lien entre ℓ et $\rho(u)$?

Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, et en déduire que e est irrationnel. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$.

On pourra introduire l'application $(x, y) \longmapsto \sum_{g \in G} \langle g(x) | g(y) \rangle$, et utilise le théorème spectral, qui assure que toute matrice réelle symétrique est semblable à une matrice diagonale et que la matrice de passage peut être choisie orthogonale.

Règle de Raabe-Duhamel Soit $\sum u_n$ une série telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge ; si $\alpha < 1$ alors elle diverge ; et qu'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.

Convergence inconditionnelle Soient $\sum z_n$ une série complexe absolument convergente et σ une permutation de $\mathbf{N}$. Montrer que $\sum z_{\sigma(n)}$ converge.

Réciproquement, soit $z_n = x_n + iy_n$ telle que $\sum |z_n|$ diverge, et l'on souhaite construire $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que $\sum z_{\sigma(n)}$ diverge. Montrer que l'une des deux séries $\sum |x_n|$ ou $\sum |y_n|$ diverge. On suppose par exemple que c'est le cas de $\sum |x_n|$. Conclure dans le cas où$(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang. Dans le cas contraire, on se donne $(x_{\varphi(n))}$ la sous-suite des termes positifs. Montrer que l'on peut supposer $\sum x_{\varphi(n)}$ divergente, et conclure.

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\pi : E \longrightarrow E$ un projecteur tel que $\forall x \in E, \|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrer que π est un projecteur orthogonal.

Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, et en déduire que e est irrationnel. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Soit $B(\alpha, \beta) := \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\log n)^{\beta}}$. Montrer que $B(\alpha, \beta)$ converge si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ dans l'ordre lexicographique.