Aide-mémoire[1] des théorèmes d'analyse de MP (réforme 2014)

Cet aide mémoire récapitule les principaux résultats du programme de classe préparatoire aux grandes écoles MP dans sa version de 2014 concernant les suites de fonctions et leur convergence.

Les résultats à la limite du programme sont explicitement signalés. En cas de doute, on se référera aux textes officiels. Conformément à ceux-ci, toutes les fonctions intégrables manipulées par la suite seront supposées continues par morceaux.

1. Généralités sur les suites et séries de vecteurs

> **Théorème (convergence des séries vectorielles dans des espaces normés) :**
> **En dimension finie**, toute série absolument convergente est convergente.

La réciproque est évidemment fausse. Ce résultat n'est pas valable sans hypothèses supplémentaires (complétude, notion hors-programme) en dimension infinie (contre-exemple : dans $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme 2 canonique, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{X^n}{n^2}$ est absolument convergente mais pas convergente (le prouver)).

Tous les théorèmes suivants sont donc valables dans des espaces normés de dimension finie (où toutes les normes sont équivalentes). Les énoncés en dimension infinie nécessiteraient de préciser la norme considérée et ne sont *pas* au programme.

> **Théorème (convergence des suites et séries de fonction) :**
> 1. Toute suite ou série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.
> 2. Toute série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.

Les réciproques de ces deux résultats sont fausses. La suite des puissances sur $[0,1]$ est simplement convergente sans être uniformément convergente. Il n'y a en fait équivalence entre convergence simple et uniforme de suites de fonctions que dans des cas très précis (sur des compacts, avec des hypothèses fortes de régularité des fonctions permettant d'appliquer les théorèmes de Dini par exemple).

Pour un exemple de série de fonctions uniformément convergente mais pas normalement convergente, penser à la série des $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où

$$f_n : \left|\begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in [n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$$

1. D'après les cours de Guillaume Brevet (professeur en MP* au lycée Pierre-de-Fermat, Toulouse) pour l'année 2014–2015. Merci de signaler les erreurs à l'auteur.

Théorème (convergence uniforme sur une réunion) :
Toute suite ou série de fonctions **uniformément** convergente sur un nombre **fini** d'ensembles est uniformément convergente sur leur réunion.

Attention, l'hypothèse d'une réunion finie est primordiale.

Théorème (Weierstraß) :
Toute fonction continue **sur un segment** y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

On trouve parfois aussi l'intitulé « théorème de Stone-Weierstraß » (généralisation à tout compact et à des algèbres autres que celle des fonctions polynomiales).

2. Continuité des limites uniformes de suites de fonctions

Théorème (permutation limite-intégrale sur un segment) :
Soit $(f_n : I \longrightarrow F)$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ admettant une **limite uniforme sur tout segment** de I. Pour tout $a \in I$:

$\left(x \longmapsto \int_a^x f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge uniformément** vers $x \longmapsto \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)$ **sur tout segment** de I contenant a.

Le résultat se traduit de la manière suivante pour les séries uniformément convergentes :

Théorème (permutation série-intégrale sur un segment) :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ **convergeant uniformément sur tout segment** de I. Pour tout $a \in I$:

1. La série des primitives $\sum_{n\geqslant 0} \int_a^{\cdot} f_n$ **converge uniformément sur tout segment** de I contenant a.
2. $\forall x \in I,\ \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^x f_n\right)$

L'hypothèse clef est ici la convergence uniforme. Un contre-exemple dû à une convergence non uniforme est donné par la suite de fonctions :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n : \left| \begin{array}{ccl} [0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \in [0, 1-1/n] \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 1 - 1/2n \\ \text{affine sur } [1-1/n, 1-1/2n] \text{ et sur } [1-1/2n, 1[\end{cases} \end{array} \right.$$

Attention, même en supposant la convergence uniforme de la suite ou de la série sur I non compact tout entier, la permutation n'est pas toujours possible ; il faut pour cela vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée (p. 6).

Théorème (double-limite) :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $A \longrightarrow F$ **uniformément convergente** sur A. Si chaque f_n **admet une limite** en a adhérent à A dans F, alors les deux limites suivantes existent dans F et sont égales :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions $A \longrightarrow F$ **uniformément convergente** sur A. Si chaque f_n **admet une limite** en a adhérent à A dans F, alors les deux limites suivantes existent dans F et sont égales :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Le théorème reste vrai si A est une partie non bornée de $\mathbf{R}$ et $a = \pm\infty$.

Théorème (dérivation des suites de fonctions) :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \left(\mathcal{C}^k(I,F)\right)^{\mathbf{N}}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. Si $g_0, \ldots, g_k$ sont des fonctions $I \longrightarrow F$ telles que :

(i) $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I vers g_j pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, et

(ii) $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge uniformément** vers g_k **sur tout segment** de I

Alors :

1. $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ **converge uniformément** vers g_j **sur tout segment**
2. $g_0 \in \mathcal{C}^k(I,F)$ et $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $g_0^{(j)} = g_j$.

L'hypothèse-clef est ici la convergence uniforme de la suite des dérivées k-ièmes sur tout segment. Un contre-exemple où cette hypothèse n'est pas vérifiée est donné par la suite de fonctions dérivables et uniformément convergente vers la valeur absolue :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n+1}} \end{array} \right.$$

Théorème (dérivation des séries de fonctions) :

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^k(I, F)$ avec $k \in \mathbf{N}^*$. Si

(i) $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I

(ii) $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ **converge uniformément sur tout segment** de I

Alors :

1. $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(j)}$ **converge uniformément sur tout segment** de I
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^k(I, F)$ et $\forall j \in [\![0, k]\!]$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

Une condition suffisante pour qu'une série de fonctions soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ est alors l'uniforme convergence de toutes les séries des dérivées sur tout segment, elle-même découlant généralement de la convergence normale des séries des dérivées sur tout segment.

3. Séries entières

Théorème (convergence des séries entières) :

Toute série entière est **normalement convergente sur tout disque fermé** inclus dans le disque ouvert de convergence. En particulier, sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence tout entier.

Attention, même si le rayon de convergence est infini, la série n'est *a priori* normalement convergente que sur des disques de rayon fini (penser à l'exponentielle).

On ne peut sans hypothèses supplémentaires rien dire sur le comportement au bord du disque.

Théorème (comportement au bord du disque (HORS-PROGRAMME)) :

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n \rho^n$ **converge absolument**, alors la somme est **continue sur le disque fermé** $\overline{\mathcal{D}}(0,\rho)$.
2. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est à coefficients réels et si $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ **est une série alternée vérifiant le critère spécial**, alors la somme a rayon de convergence au moins 1 et **est continue en** 1^-.
3. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et si $z_0 \in \mathbf{C}$ est tel que $|z_0| = \rho$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ soit **convergente**, alors la fonction suivante est continue :

$$\begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t z_0)^n \end{array}$$

Il existe une version plus forte de ce dernier résultat due à Stolz : sous les mêmes hypothèses, le résultat de convergence au bord du disque reste valable le long de n'importe quel chemin inclus dans un secteur angulaire fermé ne contenant aucune des demi-tangentes.

Théorème (intégration et dérivation des séries entières) :

1. Une série entière est **intégrable terme à terme sur tout segment**. Sa série primitive a même rayon de convergence.
2. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ **sur le disque ouvert de convergence**. Les séries dérivées k-ièmes ont même rayon de convergence.

Le second point permet de montrer l'unicité d'un développement en série entière et d'en déduire que si une fonction est développable en série entière, alors elle coïncide avec la somme de sa série de Taylor. En revanche, une fonction peut avoir une série de Taylor de rayon de convergence nul, ou encore être $\mathcal{C}^\infty$ mais ne pas être égale à son développement en série de Taylor.

Théorème (caractérisation d'une fonction développable en série entière) :

Une application $f : I \longrightarrow \mathbf{C}$ avec I intervalle réel dont l'intérieur contient 0 est développable en série entière en 0 si, et seulement si :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \, f^{(n+1)}(xu) \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

C'est-à-dire qu'une fonction est développable en série entière si et seulement si les restes intégraux de ses développements limités successifs tendent vers 0. *Ce résultat est hors-programme.*

4. Convergence dominée et applications

On travaille ici sur des fonctions à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, définies sur un **intervalle quelconque** J. Les théorèmes suivants découlent tous d'un lemme de convergence uniformément bornée (dit de Dini), hors-programme. Il est spécifié dans le programme que les hypothèses de continuité par morceaux des intégrandes « imposées par les limitations du programme » n'ont « pas l'importance des hypothèses de domination [2] ».

Théorème (convergence dominée) :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $J \longrightarrow \mathbf{K}$ continues par morceaux. Si :

(i) $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge **simplement** vers $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ continue par morceaux sur I et-

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **uniformément dominée par une fonction intégrable**, *ie* il existe une fonction intégrable $\varphi : J \longrightarrow \mathbf{R}^+$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in J, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$$

Le théorème peut être étendu pour des familles de fonctions indexées par des réels plutôt que des suites. La convergence simple reste dans ce cas suffisante.

On peut retenir le contre-exemple suivant de série de fonctions uniformément convergente pour laquelle une permutation limite-intégrale ne fonctionne pas :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, f_n : \left| \begin{array}{ccl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-n, n] \\ 1/n & \text{si } x = 0 \\ \text{affine sur } [-n, 0] \text{ et sur } [0, n] \end{cases} \end{array} \right.$$

Théorème (intégrabilité terme à terme d'une série de fonctions) :
Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions continues par morceaux $J \longrightarrow \mathbf{K}$ simplement convergente, de somme supposée continue par morceaux. Si :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur I et

2. Programme de MP 2014, p. 22

(ii) la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_J |f_n|$ est convergente.

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur J et

$$\int_J\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_J f_n\right)$$

Attention, il est parfois nécessaire de revenir à la définition de l'intégrabilité terme à terme, le théorème précédent ne sera pas applicable. Une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'intégrabilité terme à terme est alors la nullité de la limite des intégrales des restes.

Pour les résultats suivants, on travaille avec des fonctions $f : I\times J \longrightarrow \mathbf{K}$ à deux variables $x\in I$ et $t\in J$, I et J restant des intervalles **quelconques** d'intérieur non vide.

On dit que f est uniformément dominée par une fonction intégrable au voisinage de $x\in I$ s'il existe un voisinage V de x dans I et une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbf{R}^+$ intégrable sur J tels que

$$\forall y\in V, \forall t\in J, |f(y,t)|\leqslant \varphi(t)$$

Les hypothèses de domination seront toujours énoncées sous leur forme minimale ; on pourra toujours si les autres hypothèses sont vérifiées dominer sur tout segment de I voire sur I tout entier.

Théorème (continuité des intégrales à paramètres) :

Soit $f : I\times J \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction de deux variables (x,t) ; si :

(i) $\forall x\in I$, $t\longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J et

(ii) $\forall t\in J$, $x\longmapsto f(x,t)$ est **continue** sur I et

(iii) f est **uniformément dominée par une fonction intégrable** sur J au voisinage de tout point de I

Alors $x\longmapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I.

Théorème (dérivation des intégrales à paramètres) :

Soit $f : I\times J \longrightarrow \mathbf{K}$ une fonction de deux variables (x,t) admettant une première dérivée partielle d'ordre $k\in\mathbf{N}^*$ $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ en tout point de $I\times J$; si :

(i) $\forall j\in [\![0,k-1]\!]$, $\forall x\in I$, $t\longmapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux et **intégrable** sur J et

(*ii*) $\forall t \in J,\ x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est **continue** sur I et

(*iii*) $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est **uniformément dominée par une fonction intégrable** sur J au voisinage de tout point de I

Alors $x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\mathrm{d}t$$

Il n'y a pas besoin de vérifier l'intégrabilité de la k-ième dérivée partielle, celle-ci étant une implication de l'hypothèse de domination uniforme.

À noter que le théorème de continuité des intégrales à paramètres est un cas particulier ($n = 0$) de celui-ci.

On en déduit que pour qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre soit de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit que l'intégrande soit indéfiniment dérivable par rapport à la variable de la fonction, et que toutes les dérivées soient continues par morceaux par rapport à la variable d'intégration, continues par rapport à la variable de la fonction et dominées par une fonction intégrable au voisinage de tout point.

Perm.	Hypothèses majeures	Commentaire	P.
$\int \longleftrightarrow \lim\limits_n$	Convergence uniforme sur un segment	Uniquement sur des segments	2
	OU : Convergence simple et domination par une fonction intégrable	Sur un intervalle quelconque	6
$\int \longleftrightarrow \sum$	Convergence uniforme sur un segment	Uniquement sur des segments	2
	OU : Convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_J \lvert f_n \rvert$	Sur un intervalle quelconque	6
$\lim\limits_n \longleftrightarrow \lim\limits_x$ $\sum \longleftrightarrow \lim\limits_x$	Convergence uniforme et existence d'une limite à chaque f_n	Prouve aussi l'existence des limites	3
$\lim\limits_n \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ $\sum \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$	Convergence uniforme sur tout segment	Convergence des dérivées uniforme sur tout segment seulement	3
$\int \longleftrightarrow \lim\limits_x$	Continuité par rapport à x et domination par une fonction intégrable	Continuité des intégrales à paramètres	7
$\int \longleftrightarrow \frac{\partial^n}{\partial x^n}$	Continuité des dérivées par rapport à x et domination par une fonction intégrable	Dérivation des intégrales à paramètres	7

Récapitulatif des principales permutations d'opérations possibles